

Estimación de la estructura a plazos para un título de renta fija del tesoro colombiano por el método unifactorial de Vasicek*

Estimating the term structure for a fixed income security for the Colombian treasury univariate method of Vasicek

LUIS GUILLERMO HERRERA CARDONA

Master of Science in Finance (M.Sc.F). Docente e Investigador Universidad de San Buenaventura, seccional Cali, grupo de investigación GEOS. Consultor en Finanzas Corporativas y Analista de Mercados Financieros.

herreracardona@gmail.com

DARWIN CÁRDENAS GIRALDO

Master of Science in Finance (M.Sc.F). Profesional en Finanzas y Negocios Internacionales, Universidad Santiago de Cali, Cali, Colombia (2002). Investment Manager, Financial Consultant & Advisor y Analista de Mercados Financieros.

dargio12@hotmail.com

JUAN PABLO SALCEDO GARCÍA

Candidato a Magíster en Administración (MBA). Economista. Especialista en Finanzas. Docente e Investigador Universidad de San Buenaventura, seccional Cali, grupo de investigación GEOS. Consultor en Finanzas Corporativas y Analista de Mercados Financieros.

jpsalced@usbcali.edu.co

* Este documento es una derivación del texto *Modelos de valoración de opciones sobre títulos de renta fija: aplicación al mercado colombiano*, el cual corresponde al proyecto de investigación de grado realizado para optar al título de Master of Science in Finance que otorga el convenio entre la Universidad ICESI, Cali, Colombia y el Stuart School of Business at Illinois Institute of Technology, Chicago, IL, USA.

Resumen

Aquí se presenta e implementa el modelo de evolución de tasas de interés de Vasicek para estimar la estructura a plazos de un título soberano colombiano (TES con vencimiento en 2020). Para ello se efectúan algunos cálculos econométricos, a través de los cuales se encuentra que la estructura temporal de los rendimientos para el instrumento escogido exhibe una pendiente negativa (decreciente), debido al resultado de los parámetros. Así, la aplicación servirá para avanzar en el tema de modelación de los tipos de interés y su carácter estocástico en Colombia; también hará las veces de insumo para valorar opciones sobre títulos de renta fija y realizar cobertura sobre tipo de interés; a su vez, será un estímulo para la introducción y consolidación de este tipo de productos financieros.

Palabras clave: modelos de evolución de tasas de interés, estructura a plazos de los tipos de interés, modelo de Vasicek, velocidad de reversion.

Abstract

Here we present and implement the evolution model of Vasicek interest rates to estimate the term structure of Colombian sovereign title (TES maturing in 2020). To do some computations are performed econometric, through which it is found that the temporal structure of the yields for the chosen instrument exhibits a negative slope (decreasing) due to the result of the parameters. Thus, the application will serve to advance the issue of modeling interest rates and stochastic nature in Colombia, also will serve as input to value options on fixed income securities and make coverage of interest rate, in turn, be a stimulus for the introduction and consolidation of such financial products.

Keywords: models of evolution of interest rates, term structure of interest rates, Vasicek model, speed of reversion.

Fecha de presentación: noviembre de 2010

Fecha de aceptación: marzo de 2011

Introducción

En la actualidad el mercado de capitales colombiano se caracteriza por tener el 94% concentrado en títulos de renta fija, frente a un 3,07% y un 1,59% en renta variable y de-

rivados, respectivamente;¹ esto indica la relevancia que tiene la modelación de los tipos de interés para predecir el comportamiento de los precios de los bonos y facilitar el proceso de toma de decisiones en los escenarios

1. Cifras extraídas del informe de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) al 4 de noviembre de 2010.

de inversión, especulación y financiación. De manera complementaria, la simulación de los tipos de interés tiene una gran importancia como herramienta para predecir el comportamiento de los tipos y a la hora de realizar cobertura sobre activos financieros de deuda, para mitigar los riesgos de las tasas de interés. La realidad evidencia que Colombia es un país con un incipiente mercado de derivados y, peor aun, carece de metodologías para abordar el tema específico de modelación de estructuras temporales en la tasa de interés y posteriormente valorar opciones sobre títulos de deuda y tantos de interés. No obstante, de acuerdo con Ramírez (2007), la Bolsa de Valores de Colombia adoptó la metodología de Nelson y Siegel para modelar tasas de interés y sobre esta base establecer precios futuros.

Por tanto, se necesita aplicar modelos existentes para modelar las tasas de interés y estimar su estructura a plazos, y en esa vía introducir productos financieros más estructurados presentes en otros mercados en aras de fortalecer el análisis sobre estructuras temporales e impulsar el mercado de derivados en Colombia. En general, como respuesta a dicha necesidad surgen los modelos de evolución de tasas de interés, y tal como lo exponen Botero y Restrepo (2008), "en etapas incipientes de desarrollo de los mercados de derivados, estos modelos aparecen como una elección imprescindible debido a su sencillez y parsimonia".

Para el caso específico de Colombia, a partir del año 2002 se comienzan a vislumbrar estudios relacionados con estructura a plazos, entre ellos los de Arango, Melo y Vásquez (2002); Julio, Mera y Revéz (2002) y Melo y Vásquez (2002); cinco años después aparecen trabajos que incorporan la metodología de Nelson, Siegel y Svensson, como el de Ramírez (2007), y posteriormente tratados alusivos al uso de modelos de tasa corta tales

como el de Hull y White y Black y Karasinski, evidenciados en Botero y Restrepo (2008) y Grajales y Pérez (2008).

En el presente estudio se seleccionó el modelo de Vasicek (1977), que además de ser pionero de las metodologías de estructura a plazos es usado en otros mercados. Este modelo se implementa numéricamente para mostrar la evolución de la tasa de interés de un activo y la estructura a plazos de sus rendimientos.

Acto seguido se incluye una aplicación para un título de deuda pública nacional, específicamente un TES con vencimiento al 24 de julio de 2020. Para tales efectos se implementa una formulación en la hoja electrónica Excel® complementada por un algoritmo de programación en Visual Basic (VBA) y cálculos econométricos en EViews-7®, para estimar los parámetros de entrada que exige el modelo.

Como resultado de esta implementación se encuentra que la metodología converge en una estructura temporal descrita mediante una curva con pendiente negativa y tangente decreciente. Para efectos de análisis, los resultados no son satisfactorios.

El documento está estructurado de la siguiente manera: en las secciones 2 y 3 se explican brevemente los modelos de evolución de tasas y se enfatiza en la metodología de Vasicek; en la sección 4 se caracteriza el bono a evaluar; en la sección 5 se muestra la aplicación citada en el párrafo anterior, y finalmente se concluye y se realizan unas recomendaciones.

La estructura a plazos de la tasa de interés

Desde las temáticas más elementales de la teoría financiera (Mercado de capitales, De-

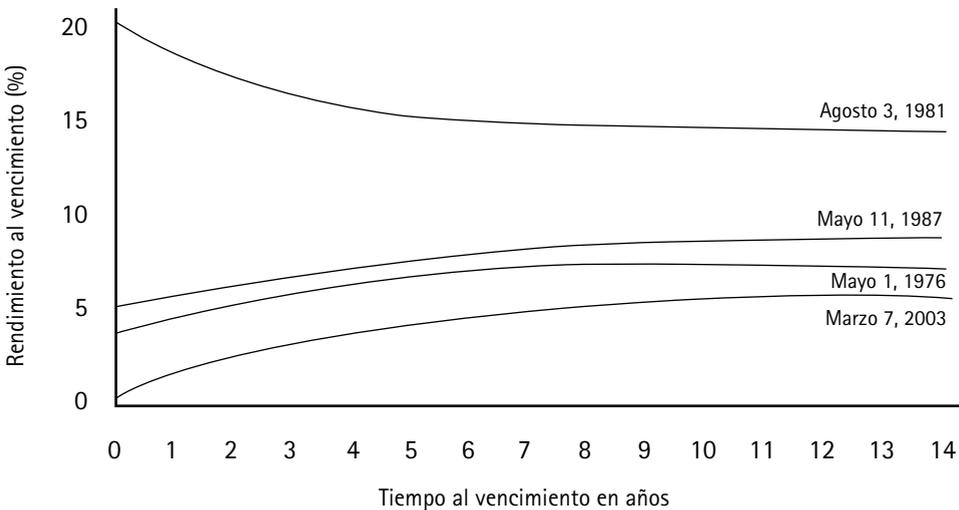
cisiones de inversión, Teoría de la elección, Equilibrio del mercado: CAPM y APT, etc.) ha estado implícito el supuesto de que la tasa de interés es constante y no estocástica para análisis multiperíodo. Este ha sido un supuesto práctico pero engañoso. Las tasas de interés no son constantes a través del tiempo. El rendimiento sobre un activo financiero de renta fija (un bono, por ejemplo) está en función de la duración del plazo al vencimiento, y también depende del riesgo de dicho título.

El Gráfico 1 muestra la estructura a plazos de la tasa de interés para un título del Tesoro de los Estados Unidos en cuatro diferentes momentos en el tiempo: marzo de 1976, agosto de 1981, mayo de 1987 y marzo de 2003. Cada curva exhibe el rendimiento al vencimiento, ${}_0R_T$, sobre un bono que es comprado en el tiempo cero (0) y vence en T años. El bono se supone que es libre por defecto, es decir, que no hay incertidumbre sobre los pagos nominales prometidos por el bono.

Existe, sin embargo, un tipo de riesgo implícito; por ejemplo, cambios inesperados en las tasas de interés futuras, porque el valor de mercado del bono cambiará conforme lo determinen las expectativas del tipo de interés.

Para entender mejor el tema en cuestión es pertinente definir el concepto de estructura temporal. De acuerdo con Vásquez y Melo (2004), la estructura a plazos de las tasas de interés puede ser definida como el vector de factores de descuento de un conjunto de bonos "cero-cupón" o libres de riesgo de default con fechas de vencimiento diferentes. Por su parte, Arango et al. (2002) la definen como la relación entre los rendimientos de títulos con similar calidad crediticia, regularmente libres de riesgo, pero con diferente período de maduración. Ante la claridad de las definiciones, no queda más que agregar que la representación gráfica de dicha estructura a plazos de los tipos de interés se conoce como curva de rendimientos (yield curve), la cual se ilustró con un ejemplo en el Gráfico 1.

Gráfico 1
 Los rendimientos al vencimiento sobre los títulos del Tesoro americano



Fuente: Copeland et al. (2005).

Ahora bien, para comprender mejor el tema del rendimiento (tasa), recordemos que los títulos soberanos por lo general están representados en bonos. Un bono no es más que una serie de flujos de caja que se pagan en el futuro y vencen en una fecha específica previamente pactada, al igual que su tasa de retorno (rendimiento) y sus cupones (si los tiene). A manera de ilustración, el precio de un bono genérico se calcula por medio de la siguiente formulación:

$$B_0 = \sum_{t=1}^T \frac{C}{(1+R_t)^t} + \frac{VF}{(1+R_T)^T} \quad (1)$$

Donde t identifica el período en que ocurre el flujo de caja; T , la madurez del título; C , el valor del cupón periódico; VF , el valor facial o de redención; y R_t , el rendimiento requerido o *yield*. Este último será igual a la tasa interna de retorno (rendimiento al vencimiento o *yield to maturity*) cuando consiga igualar el precio del activo al valor presente del flujo de caja. Para el caso de un bono de cupón cero, el precio se calcula por medio de:

$$B_0 = \frac{VF}{(1+R_T)^T} \quad (2)$$

Consideremos ahora el siguiente ejemplo hipotético: Un bono que paga un cupón de 15% al final de cada año para los próximos tres años y paga un facial de \$1.000. Supongamos además que el valor de mercado de ese bono está en \$977,54. El rendimiento al vencimiento sobre el bono puede ser calculado resolviendo para R_t en la ecuación (1), así:

$$977,54 = \sum_{t=1}^3 \frac{150}{(1+R_t)^t} + \frac{1.000}{(1+R_T)^3}$$

Resolviendo iterativamente, se encuentra que el rendimiento al vencimiento, R_t es 16%.

De esta manera, y remitiéndonos nuevamente al caso de la Gráfica 1, la estructura a plazos muestra el rendimiento al vencimiento para los bonos mencionados. En marzo 1976, mayo 1987 y marzo 2003 la estructura temporal presentó pendiente positiva, lo que permite deducir que los bonos de largo plazo pagaron rendimientos más altos respecto de los bonos de corto plazo. En agosto 1981 se dio el patrón opuesto, es decir, su estructura a plazos presentó pendiente decreciente. Un rasgo en común que se obtuvo en ambas estructuras fue el hecho de que las tasas de interés no fueron constantes. El rendimiento sobre los títulos depende, claramente, de la madurez de dichos títulos.

Precisamente, la idea central del párrafo anterior deja al descubierto el propósito principal de este estudio y se refiere a abandonar el hecho de suponer la tasa de interés como una constante. La realidad muestra que esta tasa es variable y tiene características estocásticas. La importancia de este fenómeno radica en que este comportamiento se convierte en insumo fundamental para predecir otros eventos en la economía, además de servir como variable clave en la valoración de instrumentos financieros como los derivados sobre activos de renta fija.

Una solución al problema de la dinámica estocástica en el tipo de interés: modelos de evolución de tasas y el trabajo de Vasicek

Los modelos de tasa de interés, también conocidos como modelos de estructura a plazos, están basados en teorías concernientes

al comportamiento de las tasas de interés. Tales modelos buscan identificar elementos o "factores" que pueden explicar la dinámica de las tasas de interés. Estos factores son aleatorios o estocásticos, lo que implica que sus valores futuros no pueden ser pronosticados con certidumbre. Por lo tanto, los modelos en mención utilizan procesos estadísticos para describir las propiedades estocásticas de los factores y de este modo llegar a una representación razonablemente precisa del comportamiento de la tasa.

Los primeros modelos descritos en la literatura académica explican el comportamiento de la tasa de interés en términos de la dinámica de una tasa corta². Esta estructura se refiere a la tasa de interés para un período que es infinitesimalmente pequeño.

El punto de partida en esta temática fue marcado por el trabajo de Itô (1951), el cual se exhibe en la ecuación diferencial estocástica (3)

$$dP(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dZ(t) \quad (3)$$

donde $P(t)$ se refiere al precio; $\mu(t)$ es la media; $\sigma(t)$, la volatilidad y $Z(t)$ es un movimiento browniano³.

A partir del teorema en mención se realiza una extrapolación al mundo de las tasas de interés. De esta manera surgen los modelos de evolución de tasas, que de acuerdo con Botero & Restrepo (2008) se pueden clasificar en modelos de equilibrio y modelos de arbitraje. Los primeros se basan en una serie de supuestos referentes a la economía en la cual operan y derivan un proceso para la tasa

de interés de corto plazo. En dichos modelos las estructuras a plazos de tipos de interés y de volatilidades se determinan de forma endógena. Aquí se pueden referenciar trabajos como los de Vasicek (1977) y Cox-Ingersoll-Ross (1985). Por otro lado, los modelos de no arbitraje tratan las estructuras antes mencionadas como exógenas, para procurar que los precios de los títulos dados por el modelo coincidan con los observados en el mercado. En este plano se pueden resaltar los trabajos de Ho y Lee (1986), Hull y White (1990), Black, Derman y Toy (1990); Heath, Jarrow y Morton (1990) y Black y Karasinski (1991).

Otra manera de clasificar los trabajos de tasa de interés es de acuerdo con el número de factores aleatorios objeto de análisis. Mientras los modelos unifactoriales consideran la tasa corta de interés como único factor de relevancia, aspecto que los hace débiles, los modelos multifactoriales incluyen por lo menos dos factores relevantes en su estructura a plazos de tipo de interés, por ejemplo, la tasa corta y su tendencia, la cual sigue un proceso de Gauss-Wiener⁴. Con respecto a esta última caracterización se pueden mencionar los trabajos de Brennan y Schwartz (1979), Extended Cox-Ingersoll-Ross en Chen y Scott (1992), Heath-Jarrow-Morton (1992).

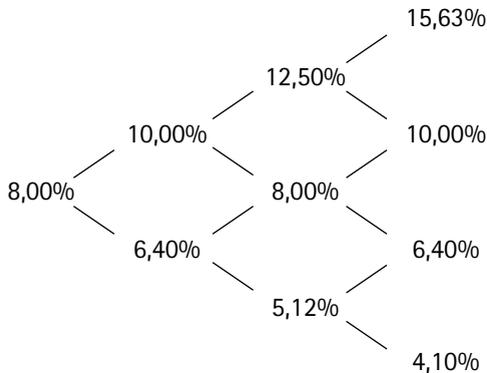
Para ilustrar el uso de estos enfoques se remitirá a la expresión (3) y colocada en los términos de Randleman y Bartter (1980), quienes mediante un ejemplo consideran una aproximación binomial para un proceso de tiempo continuo con una tasa corta inicial de 8%, un potencial de crecimiento de

2. En una literatura más técnica, tasa de interés de corto plazo.

3. Un movimiento browniano es un proceso estocástico surgido en el escenario de la física-química que explica el comportamiento aleatorio en el movimiento de las partículas en un fluido. El concepto fue adaptado a la economía y las finanzas para describir la dinámica probabilística de los precios de los activos financieros.

4. Estrictamente hablando, un proceso de Gauss-Wiener se refiere a un movimiento browniano, el cual se describió en la nota anterior.

25% ($u = 1,25$), de decrecimiento de 20% ($d = 0,8$), y una probabilidad de 50% de que la tasa suba o baje. La evolución de tasas estaría dada por:



Para determinar la estructura a plazos de las tasas de interés en el tiempo cero (0) se calcula el precio del bono para un período. Específicamente, en $t = 0$ el precio del bono será $B(0,1) = \$1/1,08 = \$0,926$. De manera similar, los valores en un período $t=1$ de los nodos superior e inferior, respectivamente, de un bono que expira en un período $T=2$ son:

$$B_u(1,2) = \frac{\$1}{1,1} = \$0,909,$$

Luego, el valor del bono hoy sería el valor esperado descontado en un período, el cual es:

$$B_d(1,2) = \frac{\$1}{1,064} = \$0,940.$$

$$B_0(0,2) = \frac{(0,5)(0,909) + (0,5)(0,940)}{1,08} = 0,8560$$

Esto implica que la tasa de interés para dos periodos sea:

$$8,085\% = \sqrt{\frac{1}{0,8560}}$$

Procediendo de manera similar con tres períodos y cuatro períodos para el bono, sus respectivos rendimientos (*yield*) serían de 8,16% y 8,23%. Entonces, la estructura a plazos de las tasas implícitas en el proceso se especifica en la Tabla 1.

Tabla 1

Estructura a plazos para el ejemplo citado

Tiempo al vencimiento en años	Tasa de interés (%)
1	8,0000
2	8,0850
3	8,1600
4	8,2300

Fuente: Copeland, et al. (2005).

Modelo de Vasicek

Este modelo fue el primer modelo de estructura a plazo descrito en la literatura académica, en Vasicek (1977). Es un modelo de rendimiento unifactorial de equilibrio que supone que la tasa corta es un proceso que sigue una distribución normal, incluida una reversión a la media.

El modelo es muy popular en los círculos académicos y en los laboratorios de mercados financieros, dado que es analíticamente tratable y fácil de implementar, aunque tiene un elemento de volatilidad constante, la reversión a la media, minimiza la certeza de presentar tasas de interés negativas en el largo plazo. No obstante, algunos expertos en el tema no utilizan el modelo porque este no necesariamente favorece el arbitraje con respecto a los precios actuales de los bonos en el mercado.

El modelo de Vasicek describe la dinámica de la tasa corta de interés y satisface el proceso de Ito dado en (4):

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (4)$$

donde

a = velocidad de reversión a la media, es decir, la rapidez con que la tasa de interés de corto plazo tiende a regresar a su valor de largo plazo, b , una vez que se ha desviado de este.

b = nivel medio de reversión de r o tasa promedio de interés a largo plazo

z = proceso de Wiener estándar con media 0 y desviación estándar 1

σ = volatilidad de los cambios de la tasa de interés de corto plazo

dt = intervalo de tiempo que tiende a cero (0)

dz = es un proceso browniano

A su vez, la dinámica de la tasa de interés dada en (4), tal y como lo interpretan Botero y Restrepo (2008), implica que los cambios en la tasa corta se componen de una tendencia dada por $[a(b - r)dt]$ y de un componente estocástico σdz .

En algunos otros textos se usan diferentes notaciones y se presenta la fórmula (4) como

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma dz \quad (5)$$

ó

$$dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma dz \quad (6)$$

De esta manera, y partiendo de (4), el precio en el tiempo t de un bono cero cupón que paga una (1) unidad monetaria y madura al tiempo T está dado por (7)⁵.

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (7)$$

Siendo

$r(t)$: tasa de corto plazo en el tiempo t

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

y

$$A(t, T) = e^{\left(b - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\alpha^2}\right)(B(t, T) - (T-t)) - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{\alpha}}$$

siempre que la ecuación (7) sea:

$$P(t, T) = e^{-({}_tR_T)(T-t)}$$

donde ${}_tR_T$ es la tasa de interés en el tiempo t para el plazo de $(T - t)$, se obtiene:

$${}_tR_T = \frac{1}{T-t} [B(t, T)r(t) - \text{Ln}[A(t, T)]] \quad (8)$$

La ecuación (8) sugiere que la curva de rendimientos completa puede ser obtenida como una función de $r(t)$, una vez especificados los tres parámetros del proceso (la velocidad de reversión, la tasa media de largo plazo y la volatilidad). De esta manera y de acuerdo con estos factores, la estructura temporal puede tener pendiente positiva, negativa o presentar forma de joroba.

En el modelo de Vasicek la tasa corta r distribuye normalmente. Por lo tanto, esto implica una probabilidad de que la tasa sea negativa, lo que no tiene sentido desde el punto de vista económico. Sin embargo, este inconveniente no descalifica absolutamente el modelo, ya que, tal y como lo mencionan Longstaff y Schwartz (1995) y Lamothe (2003), la probabilidad de que eso ocurra es muy pequeña con unos parámetros realistas, y debido a que el valor inicial de los tipos es positivo, su valor esperado seguirá siendo mayor que cero.

Para ilustrar el uso del modelo de Vasicek, considérese una situación en la cual la actual tasa corta, $r(t)$, es del 8%; la media de largo plazo, b , es 10%; la volatilidad instantánea, σ , es 5%, y la velocidad de reversión, α , es 0,2. Este conjunto de parámetros genera los

5. Para mayor profundización remitirse a Vasicek (1977) y ver la sección 5.3 en Van Deventer e Imai (1997).

resultados exhibidos en la Tabla 2 y Gráfico 2, en los cuales se puede notar la convexidad (joroba) de r_t ante el crecimiento en $1 \leq (T - t) \leq 3$, y los posteriores decrecimientos en $(T - t) = 4$ y 5.

Los parámetros a y b se pueden estimar mediante una regresión debido a que este modelo supone que la tasa corta de interés sigue un proceso AR(1)⁶, tal como se explica en (9).

$$r_t = \alpha_0 + \beta_0 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

Donde

$$\alpha_0 = ab$$

$$\beta_0 = 1 - a$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

De esta manera, la expresión (9) podría reescribirse como en (10):

$$r_t = ab + (1 - a)r_{t-1} + \sigma dZ_t \quad (10)$$

Si

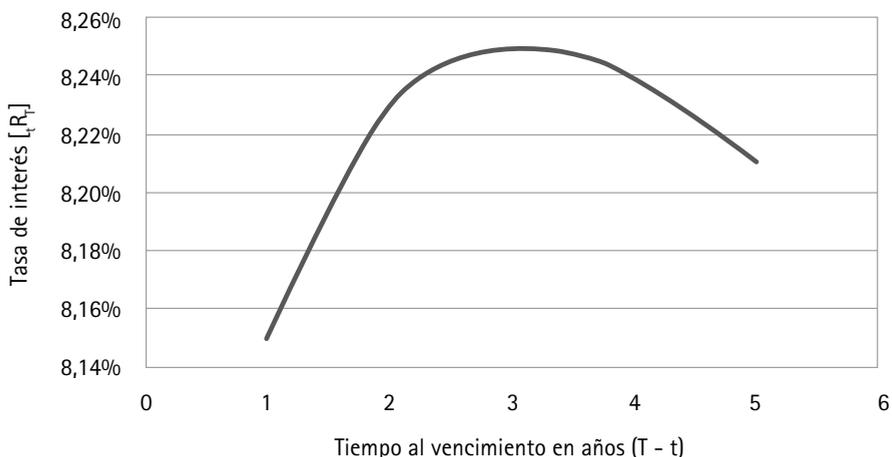
$$\partial Z \sim N(0, \partial t)$$

Tabla 2
 Estructura a plazo usando el modelo de Vasicek

Tiempo al vencimiento en años (T-t)	B(t, T)	A(t, T)	Valor de Bono Cero cupón [P(t,T)]	Tasa de interés [tRT]
1	0,9063	0,9910	0,9217	8,15%
2	1,6484	0,9679	0,8484	8,23%
3	2,2559	0,9351	0,7807	8,25%
4	2,7534	0,8964	0,7192	8,24%
5	3,1606	0,8541	0,6633	8,21%

Fuente: Copeland, Weston y Shastri (2005).

Gráfico 2
 Estructura a plazo usando el modelo de Vasicek



Fuente: Copeland, Weston y Shastri (2005)

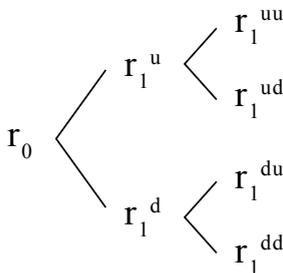
6. Quiere decir que la tasa corta se comporta como una serie autorregresiva cuyo rezago máximo es la tasa del período inmediatamente anterior. En otras palabras, el valor de las tasas cortas futuras depende de la tasa misma.

Por otro lado, la volatilidad σ puede ser estimada mediante un modelo GARCH(p,q),⁷ en el que p y q pueden tomar el máximo valor de 1. En general, el modelo puede ser descrito como en (11).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (11)$$

Siempre que $u_t \sim N(0, \sigma^2)$

Adicionalmente, el modelo de tasa de corto plazo de Vasicek puede exhibirse mediante un árbol de tasas de interés. Básicamente consiste en realizar una representación en tiempo discreto de un proceso estocástico para un modelo de tasa corta. La estructura de la ecuación de tasa corta en el modelo de Vasicek se realiza a través de un árbol binomial de tasas de interés, con pasos de tiempo Δt entre los nodos y probabilidades p_u y p_d de producirse movimientos en la tasa corta hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. Así las cosas, la forma del árbol sería la siguiente:



Con $r_1^{du} = r_1^{ud}$, r_0 es la tasa de interés en el momento de la valoración,

$$r_1^u = r_0 + \frac{a(b - r_0)}{12} + \frac{\sigma}{\sqrt{12}};$$

$$r_1^d = r_0 + \frac{a(b - r_0)}{12} - \frac{\sigma}{\sqrt{12}};$$

y así sucesivamente

Datos para la aplicación

Para este trabajo se tomaron como referencia los Bonos emitidos por la Tesorería Nacional con vencimiento el 24 de julio de 2020, TFIT15240720,⁸ por ser los títulos con más volumen de negociación y con más liquidez del mercado. El rango de datos va desde el 5 de agosto de 2005 (fecha en la cual empezaron a cotizar en pantalla) hasta el 5 de noviembre de 2010, cuyas estadísticas descriptivas y serie temporal de los datos se pueden visualizar en la Tabla 3 y en el Gráfico 3, respectivamente.

En el resumen de estadísticas se puede apreciar que entre el 5 de agosto de 2005 y el 5 de noviembre de 2010 el rendimiento promedio del título escogido fue del 9,58% efectivo y su volatilidad de 1,39% diaria. Al observar el coeficiente de asimetría se puede inferir que la distribución de los tipos de interés en el intervalo de tiempo analizado es positiva, o dicho de otra manera, sesgada hacia la derecha. Mientras tanto, la curtosis evidencia que la distribución en mención es platocúrtica, lo que sugiere que gráficamente se pueda percibir más como una curva achatada que inclinada. Finalmente, la tasa más baja se ubicó en 6,96%, evidenciada el 8 de octubre de 2010, y la más alta estuvo por el orden del 13,60%, apreciada el 27 de octubre de 2008, es decir, una brecha de 6, 64%.

7. Un proceso GARCH, o *Generalised Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity*, mide el grado de variabilidad presente en una serie de tiempo y estima las variaciones futuras a partir de sus datos históricos. Con un modelo GARCH(p,q), la volatilidad se concibe como una composición de una parte residual y otra parte explicada a partir de su variación histórica, donde p y q indican los rezagos máximos tanto en sus varianzas como en sus residuos, respectivamente. Por fortuna y basados en Brooks (2008), generalmente un modelo GARCH(1,1) será suficiente para solucionar el problema de volatility clustering presente en las series y calibrar la volatilidad en una estructura a plazos.

8. Este título es emitido por el Gobierno Nacional colombiano, vence en la fecha especificada y no paga cupones.

Tabla 3
 Resumen de estadísticas descriptivas
 para el TFIT15240720

Media	0,0958
Error típico	0,0004
Mediana	0,0944
Moda	0,0942
Desviación estándar	0,0139
Varianza de la muestra	0,0002
Curtosis	-0,1132
Coefficiente de asimetría	0,4233
Rango	0,0664
Mínimo	0,0696
Máximo	0,1360
Suma	118,7412
Cuenta	1239,0000

Fuente: Datos Banco de la República. Cálculos de los autores.

Para este caso, los parámetros de entrada que tomará el modelo (4) se estimarán mediante procedimientos econométricos, cuyos resultados se presentarán en la siguiente sección. La velocidad de reversión a la media

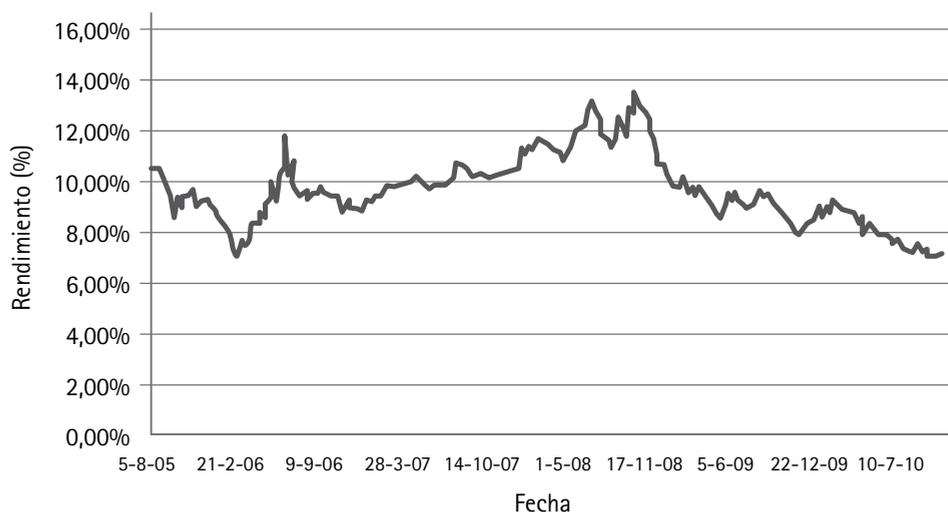
a y la tasa de largo plazo b se estimarán mediante un proceso AR(1); mientras que para la volatilidad σ se procederá a realizar un proceso GARCH(1,1). Lo anterior de acuerdo con los supuestos planteados en el *Modelo de Vasicek (1977)*, específicamente en las expresiones (10) y (11).

Por otra parte, r_0 o tasa de interés cuando t es igual a cero (0), es decir, en el momento de realizar la valoración, tomará el valor de 7,08%, cifra que corresponde al rendimiento actual del mercado para el TES escogido.

t = es periodo de tiempo inferior o igual al vencimiento del título.

T = es la madurez del bono, que para este caso es aproximadamente igual a 9,6932 desde la última cotización analizada en este trabajo, es decir, el 5 de noviembre de 2010. Es de aclarar, y como ya se mencionó anteriormente, que el bono fue emitido el 24 de julio de 2005 con un horizonte a esa fecha de 15 años, es decir, con un vencimiento al

Gráfico 3
 Serie de tiempo de las tasas de interés del título TFIT15240720



Fuente: Datos Banco de la República. Gráfico de los autores.

24 de julio de 2020; por lo tanto, el tiempo restante de caducidad es el anteriormente citado.

Los Resultados

Estimación de los parámetros a y b

Como ya se explicó, debido a que el modelo de Vasicek supone un proceso AR(1) para las tasas de interés, es necesario realizar una prueba de estacionalidad antes de estimar los parámetros. Los resultados se pueden evidenciar en la Tabla A1 de los anexos.

Estos resultados dejan en claro que la serie de la tasa de interés es no estacionaria en su nivel, mientras que en su primera diferencia sí lo es. Por tal razón, la serie de los tipos de interés para el título valor seleccionado demanda el uso de tratamientos estadísticos adicionales para efectos de análisis económicos.

Comprendido el procedimiento previo, los coeficientes del modelo descrito en (9), resultantes de correr el proceso AR(1), los cuales se describen en la Tabla A2 (ver Anexo 2), se deben transformar en términos del modelo (6). De esta manera:

$a = (1 - \beta_0)252$, por lo tanto, $a = (1 - 0,9974)252$, es decir, $a = (0,0026)(250) = 0,6552$.

$b = \alpha_0/a$, por lo tanto, $b = 0,0521/0,6552$, es decir, $b = 0,0795$.

Según las cifras arrojadas por los cálculos, se evidencia que la velocidad con la cual los rendimientos del bono TFIT15240720 revier-

ten a su media es alta (0,6552), lo cual supone que una vez la tasa de interés del título analizado se aleja de su nivel de largo plazo 7,95%, tardaría aproximadamente 1,06 años para recorrer la mitad de la brecha que la separa de su nivel de reversión.⁹

Estimación de la volatilidad σ

Partiendo de la expresión (13) y la estimación de los parámetros exhibidos en la Tabla A3 (ver anexos), la volatilidad requerida en Vasicek será la siguiente:

$\sigma_t^2 = 3,96 \times 10^{-8} + 0,0484u_{t-1}^2 + 0,8695\sigma_{t-1}^2$, por lo tanto,

$\sigma_0 = 0,0064$ diaria.

En cuanto a la estructura a plazos de la volatilidad, su tendencia es creciente según el Gráfico 4. A su vez, existe una relación directa entre dicha volatilidad y el tiempo.

Estructura a plazos de los rendimientos del título

De acuerdo con los parámetros arrojados en las estimaciones econométricas se puede observar que la curva de rendimientos presenta pendiente negativa o decreciente, lo cual implica que el pago del rendimiento será cada vez sea menor, y en contraste, la estimación del precio será mayor en el tiempo.

La Tabla 4 y el Gráfico 5 evidencian que la estructura a plazos del título analizado presenta un comportamiento decreciente que es moderado entre los tiempos a los vencimientos 1 y 2, y más pronunciado a partir de un tiempo al vencimiento mayor ó igual a 2. De manera complementaria, en un espacio de

9. El mismo análisis es abordado por Botero y Restrepo (2008), basados en Tuckman (2002), quien argumenta que es posible mostrar que la distancia entre el valor actual de una variable y su nivel de reversión de largo plazo decae exponencialmente a una tasa igual a la velocidad de reversión. Con frecuencia, este análisis se cuantifica mediante el indicador half-life, $HL = \ln(2)/a$, en el cual a es la velocidad de reversión. Dicho indicador explica cuánto tarda una variable en recorrer la mitad de la distancia que la separa de su nivel de largo plazo.

diez años (específicamente de 1 a 10 años) el rango de variación de la tasa de interés (R_t) es de 26 puntos básicos (0,26%, o desde 6,88% a 7,15%).

Debido al poder predictor de las estructuras temporales sobre tasas y a los parámetros estimados econométricamente, la trayecto-

ria futura decreciente en los títulos supone una dinámica de compra más que de venta del título. Esto quiere decir que los agentes del mercado perciben a futuro un menor riesgo sobre este activo. No obstante, este resultado no concuerda con lo que ocurre en los mercados financieros, específicamente el colombiano (ver Gráfico 6).

Gráfico 4
 Estructura temporal de la volatilidad σ

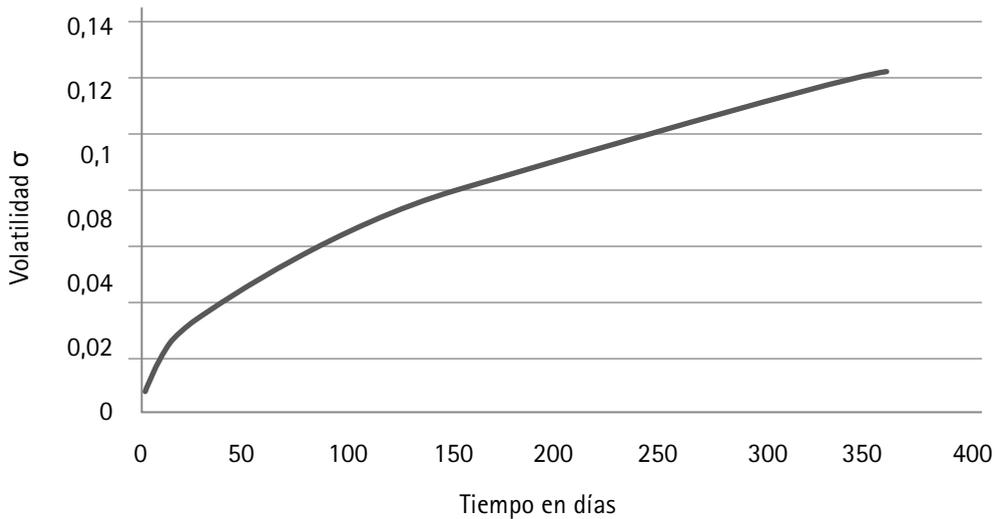


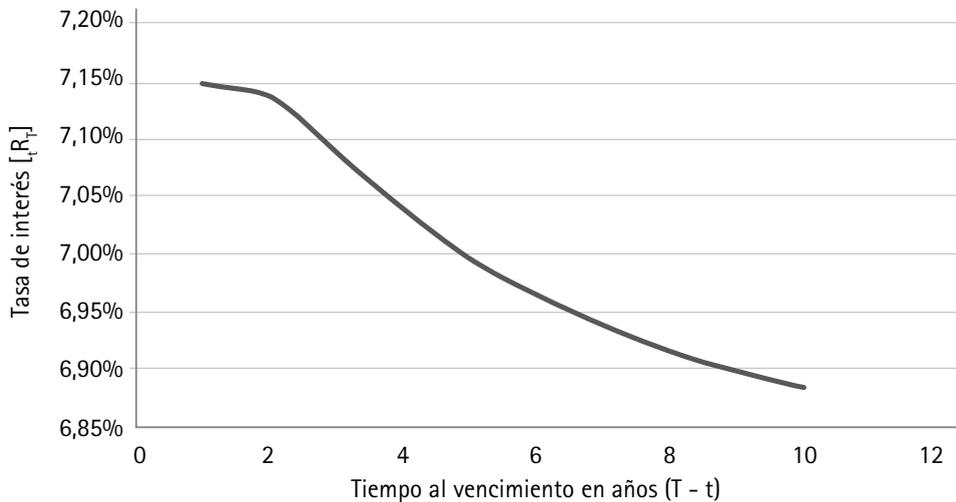
Tabla 4
 Estructura a plazos del TFIT15240720 con parámetros econométricos

Tiempo al vencimiento en años (T-t)	B(t,T)	A(t,T)	Valor de Bono Cero cupón [P(t,T)]	Tasa de interés [R_t]
1	0,733611	0,980095	0,931035	7,15%
2	1,114603	0,937365	0,867010	7,14%
3	1,312467	0,886251	0,808457	7,09%
4	1,415225	0,833211	0,754625	7,04%
5	1,468591	0,781122	0,704811	7,00%
6	1,496306	0,731227	0,658512	6,69%
7	1,510700	0,684008	0,615368	6,94%
8	1,518175	0,639590	0,575107	6,91%
9	1,522057	0,597937	0,537507	6,90%
10	1,524073	0,558939	0,502379	6,88%

Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 5

Curva de rendimiento del TFIT15240720 con estimación econométrica de parámetros



Fuente: Cálculos de los autores.

Otro aspecto fundamental sujeto a análisis es el hecho de que los rendimientos de los títulos de renta fija soberanos dependen de algunos eventos de la economía, por ejemplo, expectativas de inflación, que implican movimientos en los tipos de interés por parte de la banca central; calificaciones soberanas, riesgos fiscales que conllevan *defaults* de deuda; desastres naturales, guerras, entre otros. Frente a esto, los parámetros, o dicho de otra manera, el modelo en sí, no puede inferir los eventos económicos que ocurrirán posteriormente a la construcción del modelo, aunque sí pueden reflejar lo que ha pasado históricamente.

En el Gráfico 6 se evidencia que las pendientes de ambas curvas son crecientes (positivas), específicamente la *spot*, donde se encuentra ubicado el TES julio 2020. Esto muestra que la realidad contrasta con la modelación llevada a cabo en este trabajo.

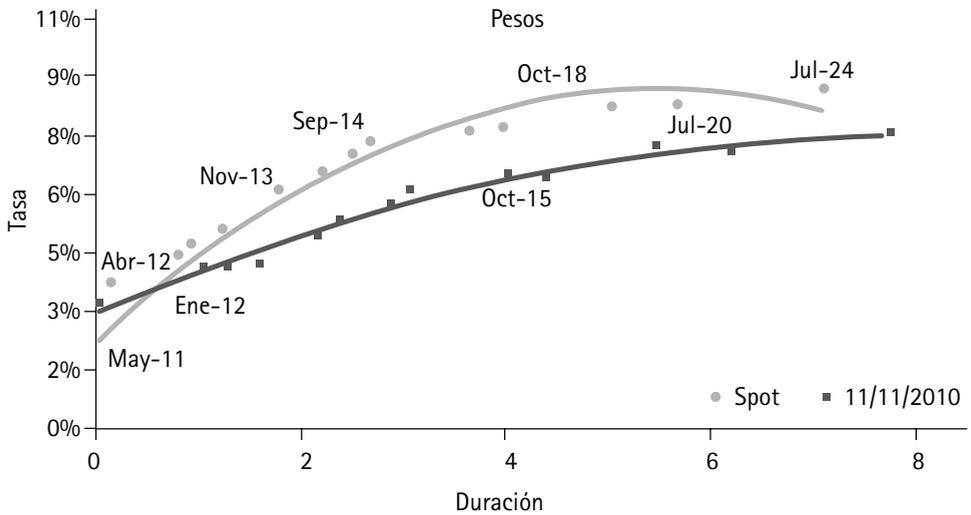
En relación con los resultados obtenidos, las posibles explicaciones sobre su no conformi-

dad podrían ser: 1) las estimaciones llevadas a cabo a partir de los parámetros a , b y σ , calculados econométricamente, no fueron las mejores para el mercado colombiano; y 2) por trabajar con una volatilidad relativamente alta, teniendo en cuenta que dicha volatilidad se supuso igual, mediante un método econométrico sugerido por el mismo Vasicek como técnica para calibrar el modelo. De hecho, la segunda explicación podría ser consecuencia de la primera.

Ante la aseveración anterior, se debe tener en cuenta que el modelo econométrico se basa en la historia de la serie de tiempo de los tipos de interés, y por tanto no puede evidenciar cambios estructurales ocasionados por otras variables de la economía que impactan directamente las expectativas de movimiento de la serie a futuro.

A pesar del inconveniente, los resultados de este estudio coinciden con los encontrados por Restrepo y Botero (2008), quienes utilizaron los modelos de estructura temporal

Gráfico 6
 Curva de rendimientos para el mercado renta fija colombiano a marzo de 2011



Fuente: Correval S.A., Colombia.

unifactorial de Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991) para aplicaciones en títulos colombianos. Finalmente, ellos concluyen que la estimación de la velocidad de reversión basada en parámetros econométricos no fue satisfactoria, motivo por el cual se vieron en la necesidad de tomar valores sugeridos en otras literaturas y continuar en otros frentes de su investigación. Por otro lado, Grajales y Pérez (2008) en el caso de la valoración de dos bonos corporativos con opción *call* embebida de ISA (Colombia) mediante la metodología de Hull y White (1990), igualmente toman los parámetros iniciales del modelo con valores referenciados por otros autores por inconsistencias en estimaciones econométricas y la ausencia de métodos de calibración.

De acuerdo con lo anterior, ¿qué posibles cambios de tipo econométrico podrían resolver el problema o mejorar la situación? Para este caso, se considera que ninguna modificación lo remediaría. El modelo de Vasicek (1977) por definición supone un proceso

autorregresivo de orden uno [AR(1)] para la tasa de interés, con una calibración para la volatilidad de tipo GARCH(1,1); esto quiere decir que si se realizaran estimaciones de orden superior o de tipo ARMA(p,q) se desvirtuaría el modelo y perdería toda su validez. Si se hiciera una prueba con un proceso AR(p), con $p = 2, 3$, o mayor, para la evolución de los rendimientos del título estudiado, los parámetros de entrada a y b serían negativos, argumentos matemáticamente lógicos, pero ilógicos desde la perspectiva de las necesidades de este estudio.

Conclusiones y recomendaciones

En esta investigación se estimó la estructura temporal de un bono del Tesoro colombiano con vencimiento en 2020, por medio del modelo de evolución de tasa corta de Vasicek (1977). Para llegar a este punto se siguió la siguiente ruta:

Estimación econométrica de los parámetros de entrada: velocidad de reversión α y tasa de largo plazo b , a través de un proceso AR(1).

Estimación econométrica de la volatilidad σ mediante un proceso GARCH(1,1).

Estimación de la evolución de la tasa de interés utilizando el modelo de Vasicek. mediante un algoritmo en Visual Basic en la hoja electrónica Excel.

Construcción de la tabla de distribución de la estructura temporal en función del tiempo al vencimiento.

Esbozo de la trayectoria de los rendimientos futuros (curva de rendimientos).

Para las estimaciones de los parámetros α , b y σ fue necesario el uso del software EViews-7[®]. Igualmente, para la evolución de las tasas de interés se implementó un algoritmo de programación en Visual Basic mediante la hoja electrónica Excel 2007[®].

Los resultados que se obtuvieron a partir de los parámetros estimados econométricamente no fueron los mejores, y dejan ver que la estructura temporal de los rendimientos del TES en mención exhibe una pendiente decreciente, evento totalmente contrario a lo que se observa en la realidad. Esto supone expectativas de rendimientos bajos en los próximos diez años.

Para efectos de investigaciones futuras se podría utilizar otras metodologías para modelar las tasas de interés, que incluyan análisis binomiales, como el modelo unifactorial de Vasicek (1977) u otros de similares características, tal vez más sofisticados (multifactoriales).

Finalmente, en el mismo escenario futuro sería pertinente modelar la estructura a plazo basado en precio y no en tasa, tal y como ocurre en los mercados desarrollados en los

cuales operan los títulos de renta fija basados en el precio y no en el tipo de interés, contrario a lo que acontece en Colombia.

Referencias y bibliografía

- ARANGO, L. E., MELO, L. F., y VÁSQUEZ, D. M. (2002). *Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia*. Borradores de Economía No. 196. Banco de la República.
- BEAUMONT, P. (2004). *Financial engineering principles a unified theory for financial product analysis and valuation*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- BENNINGA, S. & WIENER, Z. (1998). Binomial term structure models by benninga. *Mathematica in Education and Research*. Vol 7, No. 3, pp. 1-10.
- BLACK, F.; DERMAN, E. & TOY, W. (1990). *A one-factor model of interest rates and its applications to treasury bond options*. *Financial Analyst Journal*, Jan-feb., pp 33-39.
- _____ & KARASINSKI, P. (1991). *Bond and option pricing when short rates are lognormal*. *Financial Analyst Journal*, July – Aug., pp 52-59.
- BRENNAN, M. & SCHWARTZ, E. (1979). *A continuous approach to the pricing of bonds*, *Journal of Banking and Finance*, Vol 35. pp. 405-417.
- BRIGO, D. & MERCURIO, F. (2006). *Interest rate models - Theory and practice with smile, inflation and credit (2nd ed.)*. Berlin: Springer Verlag.
- BROOKS, C. (2008). *Introductory econometrics for finance (2nd. Ed.)*. New York, NY: Cambridge University Press.
- CHANCE, D. (2008). *Binomial pricing of interest rate derivatives*. Teaching Note 97-14.
- CHEN, R. & SCOTT, L. (1992). Pricing interest rate futures options with futures-style margining. *The Journal of Futures Markets*. Vol. 13. pp. 15-22.

- CHOUDHRY, M. (2005). *Fixed income securities and derivatives handbook, analysis and valuation*. Princeton, NJ: Bloomberg Press.
- COPELAND, T., WESTON, J., & SHASTRI, K. (2005). *Financial theory and corporate policy (4th ed.)*. Bogotá: Pearson Education.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E., & ROSS, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53 (2), pp. 385-408
- DEWYNNE, J., HOWISON, S., and WILMOTT, P. (1995). *The mathematics of financial derivatives*. New York, NY: Press Syndicate of the University of Cambridge.
- ERAKER, B. (2010). *The Vasicek model*. Wisconsin School of Business. Teaching Notes.
- FABOZZI, F. (1996). *The Handbook of Fixed Income Options: Strategies, pricing and applications (Revised edition)*. Chicago, IL: IRWIN Professional Publishing.
- _____ (2000). *Bond markets, analysis and strategies. (Fourth edition)*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- _____ (2002). *The handbook of financial instruments*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- GRAJALES, C. A. & PÉREZ, F. O. (2008). *Modelo de tasa corta de Hull y White y valoración de bonos con opción call*. Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.
- JULIO, J. M., MERA, S. J., & REVÉIZ, A. (2002). *La curva spot (cero cupón): Estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos*. Borradores de Economía No. 213. Banco de la República.
- HEATH, D., JARROW, R., & MORTON, A. (1990). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, pp. 419-440.
- HEATH, D., JARROW, R., & MORTON, A. (1992). *Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation*. *Econometrica*, Vol. 60, pp 77-105.
- HERRERA, L. & CÁRDENAS, D. (2010). *Modelos de valoración de opciones sobre títulos de renta fija: aplicación al mercado colombiano*. Working Paper. Universidad ICESI, Cali, Colombia; Illinois Institute of Technology, Chicago, IL, USA.
- HO, T. & LEE, S. (1986). *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*. *Journal of Finance*, No. 41, pp. 1011-1029.
- HULL, J. (2006). *Options, futures and other derivatives (6th ed.)*. Toronto: Prentice Hall.
- _____ & WHITE, A. (1990). *Pricing interest-rate- derivative securities*. *The Review of Financial Studies*, Vol 3, No. 4, pp. 392-573.
- _____ & _____ (1993). *One-factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 28, No. 2, pp 235-254.
- HULL, J. & WHITE, A. (1993). Bond option pricing based on a model for the evolution of bond prices. *Advances in futures and option research*, Vol. 6, pp. 1-13.
- ITÔ, K. (1951). On stochastic differential equations. *Memoirs of American Mathematical Society*, Vol. 4, p. 51.
- ILYA, G. (2006). *Fixed-income instrument pricing*. Munich Personal RePEc Archive – MPRA.
- KAHN. R. (1989). *Advances and innovations in the bond and mortgage markets*. Chicago, IL: Probus Publishing.
- KLOSE, C., & YUANG, L. C. (2003). *Implementation of the black, derman and toy model on bonds*. Seminar Financial Engineering, University of Vienna.
- KUEN, Y. (2008). *Mathematical models of financial derivatives (2da ed.)*. Springer Finance.
- LAMOTHE, P. (2003). *Opciones financieras y productos estructurados (2da ed.)*. Madrid: McGraw-Hill.
- LEIPPOLD, M. & WIENER, Z. (1998). *Algorithms behind term structure models of interest rates*,

valuation and hedging of interest rate derivatives with the Ho-Lee model.

- LONGSTAFF, F. and SHWARTZ, E. (1992). Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model. *The Journal of Finance*, Vol 47, No. 4, pp. 1259-1282.
 - MARTÍNEZ, J. (2000). *Modelos de no-arbitraje y modelos de equilibrio. Fórmulas de valoración de derivados de tanto de interés. Anales de Economía Aplicada*. XIV Reunión ASEPELT - España, Oviedo. 22 y 23 de junio.
 - MARTÍNEZ, J. & PEDREIRA, L. (2000). *Valoración de títulos mediante el uso de los procesos estocásticos*. V Jornadas ASEPUMA. Universidad de la Coruña, España.
 - MELO, L. F., & VÁSQUEZ, D. M. (2004). *Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones B-spline cúbicas*. Borradores de Economía No. 210. Banco de la República.
 - NELSON, C. & SIEGEL, A. (1987). *Parsimonious modeling of yield curves*. *Journal of Business*, Vol. 70, No. 4, pp 473-489.
 - RAMÍREZ, F. H. (2007). *Conceptos y construcción de la curva de rendimiento de TES en Colombia con las metodologías de Nelson-Siegel y Svensson*. Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.
 - RANDLEMAN, R. & BARTTER, B. (1980). The pricing of options on debt securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 15, pp. 11-24.
 - RESTREPO, D. A. & BOTERO, J. C. (2008). *Modelos unifactoriales de tipo de interés: aplicación al mercado colombiano*. Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.
 - RIECKHOF, P. (1999). *Una aproximación a la estructura de plazos de tasas de Interés en el mercado financiero*. Superintendencia de Banca y Seguros de Perú.
 - SVENSSON, L. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates*. Sweden 1992 -1994, NBER Working Paper No. 4871.
 - TUCKMAN, B. (2002). *Fixed income securities: tools for today's market*. Toronto: Wiley
 - VAN DEVENTER, D. & IMAI, K. (1997). *Financial risk analytics*. New York: McGraw-Hill Companies.
 - VASICEK, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177-188.
 - WHALEY, R. (2006). *Derivatives markets, valuation, and risk management*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
-

Anexos

Anexo 1

Pruebas de estacionariedad para la serie de los rendimientos del bono TFIT15240720

Tabla A1
 Prueba de raíces unitarias para la evolución de tasas de interés del bono TFIT15240720 05/09/2005 - 05/11/2010. P-valores entre paréntesis

	Nivel			Primera diferencia		
	ADF	PP	KPSS	ADF	PP	KPSS
r_t	-1,8025 (0,7032)	-1,2003 (0,9092)	0,8615+++	-7,5052*** (0,0000)	-34,1881*** (0,0000)	0,0984

ADF y PP corresponden a sus respectivos estadísticos de la prueba de estacionariedad de Dickey-Fuller aumentado y Phillips-Perron respectivamente.

KPSS corresponde al estadístico de la prueba de raíces unitarias de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin.

p-valores entre paréntesis.

*** Rechaza la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria a un nivel de significancia del 1%.

+++ Rechaza la hipótesis nula de un proceso estacionario alrededor de una tendencia a un nivel de significancia del 1%.

Como ya se mencionó en el apartado *Estimación de los parámetros a y b*, los resultados arrojados por las pruebas evidencian que la serie de la tasa de interés en el rango de tiempo seleccionado es no estacionaria en su nivel, mientras que en su primera diferencia sí lo es.

Anexo 2

Estimación econométrica de los parámetros velocidad de reversion, a, y tasa de largo plazo, b

Tabla A2
 Estimación del modelo (9)
 mediante un proceso AR(1)

	Variable dependiente: r_t
	Estadísticos t entre paréntesis
	Ecuación 9
	MCO
Constante	0,0521 (0,6213)
r_{t-1}	0,9974 (128,9441) ***
R ²	0,9878
R ² ajustado	0,9877
F	16626,58 ***
No. de obs.	208

(*) Nivel de significancia 10%.

(**) Nivel de significancia 5%.

(***) Nivel de significancia 1%.

MCO: Minutos cuadrados ordinarios.

Anexo 3

Estimación econométrica de la volatilidad " σ "

Tabla A3
 Estimación del modelo (11) GARCH(1,1)
 para el proceso AR(1)

	Variable dependiente: r_t
	Estadísticos z entre paréntesis
	Ecuación 11
	MI
Constante	3,96E-08 (-1,9197) *
u_{t-1}	0,0484 (1,2993)
σ^2_{t-1}	0,8695 (12,6909) ***

(*) Nivel de significancia 10%.

(**) Nivel de significancia 5%.

(***) Nivel de significancia 1%.

ML: Máxima verosimilitud.

Tabla A4

Pruebas de autocorrelación de Ljung-Box para los residuos y los residuos al cuadrado del modelo.
Pruebas de Ljung-Box para los residuos modelo GARCH(1,1)
del proceso AR(1) para la 1ra diferencia (modelo de Vasicek)

Rezagos	Autocorrelación	Autocorrelación parcial	Q-Stat	Prob
1	0,028	0,028	0,993	
2	0,046	0,045	3,572	0,059
3	0,033	0,030	4,917	0,086
4	-0,011	-0,015	5,069	0,167
5	0,037	0,035	6,755	0,149
6	0,014	0,013	7,006	0,220
7	0,070	0,067	13,025	0,043
8	0,023	0,016	13,672	0,057
9	0,065	0,059	18,986	0,015
10	-0,006	-0,016	19,032	0,025

Fuente: Cálculos de los autores.

Rezagos	Autocorrelación	Autocorrelación parcial	Q-Stat	Prob
1	0,004	0,004	0,025	
2	-0,007	-0,007	0,083	0,773
3	-0,013	-0,013	0,028	0,869
4	0,008	0,008	0,037	0,947
5	-0,026	-0,026	1,183	0,881
6	0,022	0,022	1,760	0,881
7	-0,047	-0,047	4,514	0,607
8	-0,020	-0,020	5,034	0,656
9	-0,041	-0,040	7,083	0,528
10	-0,020	-0,023	7,605	0,574

Fuente: Cálculos de los autores.

Los resultados de las pruebas de autocorrelación muestran que estadísticamente no existe correlación serial de los residuos y residuos al cuadrado de los modelos seleccionados (en su primera diferencia) para órdenes menores a diez rezagos.