Modelo Black-76: ajuste al modelo inicial de Black-Scholes (1973) para valorar opciones sobre instrumentos de renta fija*

Black-76 Model: adjustment of the initial model of Black-Scholes (1973) to assess options on fixed income instruments

LUIS GUILLERMO HERRERA CARDONA
M. Sc. en Finanzas Universidad Icesi, Cali, Colombia e Illinois Institute of Technology, Chicago, IL, USA; Ingeniero Industrial, Universidad de San Buenaventura Cali. Docente e investigador, Universidad de San Buenaventura Cali. Consultor en finanzas corporativas y analista de mercados financieros.
herreracardona@gmail.com

Si usted piensa que las acciones se irán abajo, compre una put; si piensa que las acciones subirán, adquiera una call.

Tumbridge & Company. Consejo dado a sus clientes en 1875.

Resumen

En este documento se presenta la transformación que debe sufrir el modelo Black-Scholes (1973) para ajustarse a una metodología de valoración de opciones sobre títulos de renta fija conocida como Black-76 (1976). Para deducir la formulación, se hace primero una breve introducción a la teoría de opciones, luego se expone el

*. Este documento es una derivación del manuscrito *Modelos de valoración de opciones sobre títulos de renta fija: aplicación al mercado colombiano*, el cual corresponde al proyecto de investigación de grado para optar al título de Master in Science of Finance que otorga el convenio entre la Universidad Icesi, Cali, Colombia y el Stuart School of Business at Illinois Institute of Technology, Chicago, IL, USA.

modelo de Black-Scholes convencional y finalmente se explican las variantes. El texto también menciona las características del modelo genérico, sus supuestos y su trascendencia y muestra algunos ejemplos ilustrativos.

Palabras clave: modelo Black-76, opción call y put, strike, valoración de opciones, renta fija.

Abstract

This paper presents the transformation that must have the Black-Scholes model (1973) to fit a valuation methodology of options on fixed income securities known as Black-76 (1976). To derive the formulation, it is a brief introduction to the theory of options, then it is exposed the Black-Scholes model and finally conventional variants are explained. The text also mentions the characteristics of the generic model, its assumptions and its significance and shows some examples.

Keywords: Black-76 Model, call and put option, strike, option pricing, fixed income.

Fecha de presentación: agosto de 2011 Fecha de aceptación: noviembre de 2011

Introducción

Los contratos de opción son uno de los instrumentos fundamentales de un mercado financiero moderno. La idea más difundida entre los inversionistas y los profesionales es que las opciones tienen una vida corta y constituyen uno de los elementos más representativos –posiblemente el más importante– del proceso de innovación financiera. En países como España o Francia, por dar solo dos ejemplos, las opciones se asocian con las reformas de los mercados de valores y su negociación es un síntoma de la modernización de los respectivos mercados (Lamothe, 2003).

Tal como se menciona en Reuters (2001), los operadores de los mercados han usado opciones sobre mercancías y valores durante siglos. En 1630 en la época del capricho por los tulipanes holandeses, los comerciantes les otorgaban a los floricultores el derecho de vender sus cosechas de bulbos por un precio mínimo fijado y para obtener este privilegio el floricultor le pagaba a una tarifa al comerciante. Así mismo, los comerciantes de tulipanes les pagaban una tarifa a los floricultores por el derecho a comprar la cosecha de bulbos según un precio máximo acordado.

En los primeros años de la década de 1820, el mercado de valores de Londres ya comerciaba opciones sobre acciones y en 1860 había mercados OTC[1] de opciones sobre materias primas y títulos valores en Estados Unidos.

1. Un mercado OTC u *Over The Counter* (en el mostrador) es aquel en el cual se negocian de forma privada, cara a cara o por teléfono, fax, etc., contratos de derivados, a diferencia de la contratación en bolsa, que implica la negociación de viva voz y cuyos operadores gritan los pedidos unos a otros.

Esos primeros mercados no carecían de problemas, como la falta de regulación y el incumplimiento de contrato, entre otros.

El crecimiento moderno de las operaciones con opciones, se basa en los sucesos económicos y políticos acaecidos en las décadas de los setenta y ochenta, con la introducción de los derivados sobre divisas y tipos de intereses en general.

Los contratos de futuros sobre materias primas hechos en mercados bursátiles se habían establecido hacia 1860, pero los contratos de opciones sobre materias primas no se pudieron llevar a cabo hasta cien años después. Las operaciones bursátiles sobre títulos valores norteamericanos comenzaron en 1973 cuando se estableció el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE)[2] en 1978; para entonces LIFFE[3] operaba con opciones sobre un número limitado de valores del Reino Unido. Las operaciones con opciones en los mercados se llevaban a cabo de forma muy similar a las operaciones con futuros y utilizaban el mismo sistema de compensación y entrega[4].

Hacia finales de los años ochenta y principios de los noventa, los mercados OTC de derivados ofrecían una amplia variedad de opciones para satisfacer las necesidades financieras de sus clientes. Estos mercados han tenido un crecimiento descomunal a partir de 1991.

En el caso de Colombia, el mercado de derivados tiene tan solo una participación de 1,25 %[5], frente a un 93,91 % de renta fija y un 2,41 % de renta variable. No obstante, las operaciones sobre opciones son prácticamente nulas debido a que el mercado de derivados está representado en los contratos a plazo y futuros. Esta conducta evidencia que Colombia es un país con un incipiente mercado de derivados y peor aún, carece de metodologías para abordar el hecho específico en valoración de opciones; sin embargo, cabe destacar que la alta concentración en títulos de renta fija se convierte en una gran oportunidad para desarrollar opciones (u otros derivados) sobre valores de deuda y tipo de interés. No obstante, de acuerdo con Ramírez (2007) La Bolsa de Valores de Colombia adoptó la metodología de Nelson y Siegel para modelar tasas de interés y sobre esta base valorar precios de contratos futuros.

En cuanto a la revisión del modelo de Black-Scholes (1973)[6] y sus variantes, en la valoración de opciones de renta fija no se conocen estudios publicados en Colombia. Los tratados sobre valoración de opciones se han orientado más hacia el tema de modelación de los tipos de interés y los modelos de estructura a plazos, estudios que, seguramente, tienen implícito la formulación BS (73) pero no han profundizado en dichas variantes debido a sus alcances. A partir del 2002, se vislumbran estudios relacionados con estas estructuras temporales, entre los cuales se encuentran los trabajos de Arango, Melo y Vásquez (2002); Mera y Revéiz (2002) y Melo

2. El *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) o bolsa de opciones de Chicago, es la bolsa de contratos de opciones más grande y con mayor volumen de transacciones de Estados Unidos y una de las de mayor operación en el mundo. Fue creado en 1973 justo el año en que se publicó el trabajo de Fisher Black y Myron Scholes en el que valoran opciones europeas (uno de los objetos de este documento).
3. LIFFE: *London International Financial Futures* and Options Exchange o mercado internacional de futuros y opciones de Londres. Hace parte del primer mercado integrado europeo de negociación de acciones, bonos y derivados, Euronext.
4. Para mayor comprensión sobre el tema remitirse a *The Reuters Financial Training Series*, Course on Derivatives (2001).
5. Cifra al cierre del año 2010, según el informe anual de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC).
6. BS (73) en adelante.

y Vásquez (2004). Cinco años después se publican documentos que incorporan la metodología de Nelson-Siegel (1987) y Svensson (1994), así como el de Ramírez (2007) y posteriormente tratados alusivos al uso de modelos de tasa corta, tales como el de Hull y White (1990); Black y Karasinski (1991) y Vasicek (1977) evidenciados en Restrepo y Botero (2008), Grajales y Pérez (2008) y Herrera y Cárdenas (2010), respectivamente.

En este documento se expone la variante del modelo BS (73) para calcular el valor de las primas en opciones sobre bonos. Este modelo, que en principio se diseñó para acciones, posee una fuerte fundamentación matemática y estadística. Pese a que ha sido muy cuestionado y se han hecho avances para corregir sus debilidades, se ha constituido en la base de los modelos más avanzados para valorar opciones en los mercados desarrollados. El trabajo consiste en hacer una presentación matemática muy somera a partir de las características implícitas, particularmente en los títulos de renta variable y fija y de sus diferencias.

El documento está estructurado de la siguiente manera. En la sección 2 se introduce la teoría de opciones; en la sección 3 se presenta el modelo BS (73); en la sección 4 se muestra la modificación que debe sufrir el modelo para calcular primas sobre valores de renta fija y en la parte final se exponen las conclusiones y se hacen algunas recomendaciones.

Introducción a la teoría de opciones

De acuerdo con Bacchini (2007), las opciones financieras se enmarcan dentro de un tipo particular de activos financieros denominados instrumentos derivados. El valor de un derivado depende del valor de otro activo más elemental sobre el cual está basado, denominado activo subyacente. Es decir, el valor de un "derivado" se "deriva" del valor de otro activo más elemental.

Para explicar de manera práctica y no técnica, considérese el ejemplo tomado del curso sobre derivados de Reuters[7] (Reuters, 2001).

Suponga que usted se va al concesionario y en la sala de exposición se da cuenta de que el automóvil que usted quiere está en oferta por 20.000 u.m., pero tiene que comprarlo hoy mismo. Usted no dispone de esa cantidad y conseguirla mediante un crédito le llevaría una semana. Podría ofreceré al vendedor un depósito y hacer un contrato a plazo de una semana, pero también podría ofrécele algo diferente. En este caso le puede ofrecer 100 u.m. al vendedor para que le guarde el auto una semana y las 100 u.m. serán suyas compre o no compre el coche. La oferta es tentadora y el vendedor la acepta. Usted ha hecho un contrato de opción, en este caso llamado *call* u opción de compra. Significa que tiene el derecho de comprar el coche dentro de una semana pero no la obligación.

Si durante la semana descubre un segundo concesionario que ofrece un modelo idéntico por 19.500 u.m., usted simplemente no ejerce su opción con el primer concesionario. En ese orden de ideas, el costo total de comprar el automóvil será en este caso: 19.500 u.m. + 100 u.m. = 19.600 u.m., un valor que el que usted estaba dispuesto a pagar.

Si no encuentra el auto a un precio más bajo y lo compra en el primer concesionario, el costo total será de 20.100 u.m. Si finalmente

7. Para mayor comprensión o profundización, consultar *The Reuters Financial Training Series, Course on Derivatives* (2001).

decide no comprar ningún auto, solamente habrá perdido 100 u.m. entregadas al concesionario.

Ahora, técnicamente hablando, una opción es un acuerdo entre dos partes por medio del cual el titular (comprador) tiene el derecho, aunque no la obligación, de comprar o vender un activo financiero específico (subyacente), a un precio establecido (precio de ejercicio) antes de una fecha determinada o en esa misma fecha (fecha de expiración). La opción de comprar se denomina *call*, mientras que la opción de vender se conoce como *put*.

En función del momento en que pueda ejercerse, la opción puede ser americana, cuando se ejerce en cualquier fecha antes del vencimiento; y europea, solo si se ejecuta en la fecha de expiración.

El precio de una opción se fija en el mercado y tiene dos componentes: el valor intrínseco y una prima. El primero se refiere al beneficio que se obtendría al ejercerla, teniendo en cuenta la fecha en que se ejecute. En una *call* sería la diferencia entre la cotización del activo subyacente (S) y el precio de ejercicio o *strike* (K), cuando $S > K$; caso contrario, si $K>S$ el precio de la opción es cero. Para la *put*, el valor intrínseco se obtendrá de la diferencia entre el precio *strike* (K) y la cotización del subyacente (S), siempre que $K > S$; en caso contrario el valor es cero.

Por otro lado, la prima es la suma del valor intrínseco y el valor temporal. El primero ya se explicó en el párrafo anterior. El segundo componente, se refiere a la cantidad que se necesita para compensar el riesgo que el vendedor asume al aceptar que la opción estará en una situación en dinero[8] (*in the money*, ITM) antes de su vencimiento.

Aunque el precio de una opción viene determinado por la ley de la oferta y la demanda, las principales variables (factores) que inciden en la formación de este son: el precio del subyacente o spot (S), el precio de ejercicio o strike (K), la fecha de vencimiento (expiración) o maduración de la opción, la volatilidad (variabilidad en los precios o rendimientos), los tipos de interés, y los dividendos (este último para el caso de opciones sobre acciones).

Para valorar opciones o calcular la prima, se emplean modelos matemáticos complejos: el modelo de Black-Scholes (1973), el teorema binomial, el método de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y la versión BS de Garman-Kohlhagen (1983). Para efectos de este trabajo se utilizará solo el primer método.

Modelo fundamental de Black-Scholes (1973) para valorar opciones europeas sobre títulos de renta variable

Características del modelo

Se le llama así por ser el resultado del trabajo de Fisher Black y Myron Scholes en 1973. Está resumido en el documento *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*[9]. Black y Scholes fueron los primeros en proporcionar una herramienta matemática fiable con la cual los operadores podían valorar las primas de las opciones.

Este modelo constituyó un importante logro científico alrededor del mundo debido a la

8. En una situación *in the money* (en dinero), para una opción de compra (*call*), el precio del activo subyacente es mayor que el precio de ejercicio; mientras que para una opción de venta (*put*), el precio del subyacente es menor que el precio de ejercicio.
9. Para profundizar en el tema, consultar Black & Scholes (1973).

creación de diversas soluciones a muchos problemas financieros existentes por más de setenta años. Sin embargo, su principal contribución e importancia práctica radica en que ha hecho posible la administración científica del riesgo y esta a su vez, ha generado un rápido crecimiento en las tres últimas décadas de los mercados derivados.

Desde su aparición, el modelo BS (73) produjo un auge sorprendente en el uso de diferentes instrumentos financieros y sus derivados, mediante el diseño de innovadoras estrategias de negociación a fin de protegerse contra los riesgos financieros y poder especular con ellos en los mercados modernos. Tal invención impactó tanto el mundo económico y financiero, que veinticuatro años más tarde hizo merecedor a sus autores (antes mencionados) y al colaborador Robert C. Merton del premio Nobel de Economía en 1997.

Cuantitativamente hablando, el método como tal se usa para valorar opciones europeas y asume una distribución log-normal en los precios de los activos. Las primas se estiman mediante la siguiente fórmula:

Para una *call* europea:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \qquad (1)$$

Para una *put* europea:

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \qquad (2)$$

En donde,

$N(d_1)$, $N(d_2)$, $N(-d_1)$ y $N(-d_2)$, valor de la función de distribución normal para d_i,

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

S es el precio *spot* o actual del activo (en tiempo cero), *K* el precio de ejercicio o strike, *T* el tiempo al vencimiento, *r* la tasa de interés compuesta continua [$r = Ln(1+i)$, siendo *i*, la tasa en tiempo discreto], y σ la volatilidad en el precio del activo (desviación estándar periódica de los rendimientos).

Supuestos del modelo Black-Scholes

Tal y como se menciona en Lamothe (2003), el modelo de Black-Scholes parte de hipótesis similares al modelo de Cox-Ross-Rubinstein (1979)[10] sobre el funcionamiento del mercado y adiciona algunos supuestos particulares acerca de la evolución del precio del subyacente. Fundamentalmente, sus supuestos de base son los siguientes:

- El mercado funciona sin fricciones; es decir, no existen costos de transacción, de información ni impuestos y los activos son perfectamente divisibles.
- Las transacciones tienen lugar de forma continua y se da una plena capacidad para hacer compras y ventas en descubierto (en corto o apalancado) sin restricciones ni costos especiales.
- Los agentes pueden prestar y endeudarse a una misma tasa *r*, es decir, el tipo de interés a corto plazo expresado en forma de tasa instantánea y supuesto conocido y constante en el horizonte de valoración de las opciones.
- Las opciones son europeas y el subyacente (la acción en este caso) no paga dividendos en el horizonte de valoración.

Finalmente, el precio del subyacente sigue un proceso continuo estocástico de evolución de Gauss-Wiener, definido así:

10. Aunque primero se planteó el modelo de Black-Scholes (B-S), Cox -Ross -Rubinstein (1979) es una versión discreta a partir de la cual es posible llegar a la versión continua que, precisamente, es la versión trabajada por B-S.

$$\frac{\delta S}{S} = \mu\delta t + \sigma\delta z$$

donde δS representa la variación de S en el instante δt, μ el valor esperado del rendimiento instantáneo del subyacente, σ su desviación típica y δz un proceso estándar de Gauss-Wiener.[11]

Un ejemplo de aplicación

Considérese el siguiente caso. El precio de una acción cotiza hoy a 90 u.m. y sobre ella se busca pactar un contrato de opción de compraventa con un precio de ejercicio de 85 u.m. El vencimiento del contrato es de tres meses (es decir, aproximadamente 0,25 años), la tasa de interés discreta es del 12 % anual (por lo que r = Ln (1+i) = Ln(1,12) = 0,1133) y la volatilidad, σ, es del 30 %.

Los parámetros calculados serían:

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{90}{85}\right) + (0.1133 + \frac{1}{2}\times 0.30^2)\times 0.25}{0.30\times\sqrt{0.25}} = 0.6449$$

$$d_2 = 0.6449 - 0.30\times\sqrt{0.25} = 0.4949$$

Con esto, los valores de las primas *call* y *put* serían:

$$C = 90\times N(0.6449) - 85e^{-0.1133\times 0.25} \times N(0.4949) = 9.66\,u.m.$$

$$P = 85\times e^{-0.1133\times 0.25}\times N(-0.4949) - 90\times N(-0.6449) = 2.28\,u.m.$$

De esta manera, para una acción que hoy vale 90 u.m. y su *strike* es de 85 u.m. tiene una opción de compra con valor de 9.96 u.m. y una prima de opción de venta de 2.28 u.m.

Variante del modelo BS (73) para valorar opciones sobre título de renta fija, la adaptación Black-76

Para valorar un título de renta fija con el modelo BS convencional, las fórmulas (1) y (2) deben experimentar una pequeña variación. Se debe sustituir la variable "*S*" por "*B*". En ese orden de ideas, el precio teórico de las opciones *call* y *put* sobre un bono es calculado mediante las ecuaciones (3) y (4).

$$C = BN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \qquad (3)$$

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - BN(-d_1) \qquad (4)$$

donde B es el precio del bono subyacente y todos los demás parámetros continúan iguales. Esto implica que en los indicadores d_1 y d_2 también debe hacerse la sustitución, la cual quedará de la siguiente forma:

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{B}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

En cuanto al precio de un bono subyacente y de acuerdo con Choudhry (2005), para el caso de un bono cero cupón (*Zero-coupon bond*) el precio simplemente es el valor presente de su valor futuro; para un bono subyacente con cupones es lo mismo, pero se le debe restar el valor presente de los cupones pagados durante la vida de la opción.

A manera de ejemplo, calcúlese el precio de una opción de compra europea con un valor facial (precio *strike* o de ejercicio) de 100 u.m. y una madurez de un año, suscrito sobre un bono con las siguientes características:

11. El proceso de Gauss-Wiener, es un tipo de proceso estocástico markoviano que se ha usado en física para describir el movimiento browniano de una partícula que está sujeta a un gran número de pequeños choques moleculares que cambian en cada momento su trayectoria. Para profundizar en el tema, remítase a Tuckman (2002) y Pedraja *et al.* (2000).

Precio	98 u.m
Cupón semianual	8 %
Vencimiento	cinco años
Volatilidad en el precio del bono	6,02 %
Pago de cupones	4 u.m., uno pagado en tres meses y el otro a los nueve meses desde la negociación de la opción.
Tasa de interés libre de riesgo a tres meses	5,60 %
Tasa de interés libre de riesgo a nueve meses	5,75 %
Tasa de interés libre de riesgo a un año	6,25 %

Al calcular el valor presente de los pagos de cupones realizados durante la vida de la opción, se obtiene:

$$4e^{-0.056\times0.25}+4e^{-0.0575\times0.25}=$$

$$3.9444+3.83117=7.77557u.m.$$

Al restar el valor anterior al precio actual del bono:

B = 98-7.78=90.22 u.m.

Calculando d_1 y d_2:

$$d_1=\frac{Ln\left(\frac{90.22}{100}\right)+(0.0625+\frac{1}{2}\times0.0602^2)\times1}{0.0602\times\sqrt{1}}=-0.6413$$

$$d_2=-0{,}6413-0{,}0602\times\sqrt{1}=-0{,}7015$$

Reemplazando los valores anteriores en la ecuación (3) para el cálculo del precio de la opción *call* del bono:

$$C=90.22N(-0.6413)-100e^{-0{,}0625}N(-0.7015)=1.1514\,u.m.$$

Por lo tanto, la prima *call* del bono se estima en 1.15 unidades monetarias.

Nótese que esta metodología y en general otros modelos estándares, tienen un supuesto clave que a su vez la hace cuestionable, y se refiere al hecho de asumir que la tasa de interés es constante. Evidentemente si lo que se quiere es valorar opciones sobre tipos de interés y se supone que estos son constantes, se asume que la volatilidad también es cero; y si la volatilidad fuese cero no tendría ningún sentido valorar una opción para la tasa de interés. La realidad evidencia que su naturaleza es aleatoria, por tal razón el modelo debe sufrir un ajuste incluso más estructural que considere la dinámica estocástica de la tasa. Para ello se debe considerar el tratamiento de los modelos de estructura temporal[12] (a plazos) de los tipos de interés, los cuales se pueden evidenciar fácilmente en Martínez (2000) y Herrera y Cárdenas (2010). No obstante, no se abordará debido a que ese no es el propósito de este documento.

La evolución del tipo de interés y el ajuste en la variante de la formulación de Black-Scholes

Una vez inteligible el comportamiento aleatorio en los tipos de interés y la dificultad en el modelo BS originario al asumir la tasa de interés como un valor constante, en 1976 Fisher Black presentó una versión modificada del modelo convencional de 1973 usando supuestos similares para valorar opciones sobre contratos a plazo. Desde entonces, el modelo se conoce como Black-76. Hoy, los bancos emplean esta versión modificada para valorar *swaptions*[13] e instrumentos similares. De igual

12. Estos modelos implican el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas para modelar (evolucionar) las tasas futuras de interés y estimar de manera precisa los precios *strike* de los títulos.
13. Un *swaption* es un derivado financiero consistente en una opción cuyo subyacente es un *swap*, normalmente un *interest rate swap* (IRS). Es decir, ofrece la posibilidad de entrar en una permuta de tipo de interés.

manera, se ha conocido su empleo para opciones sobre bonos y tipo de interés, tales como *caps*[14] y *floors*[15] de tal forma que las opciones sobre bonos pueden ser tratadas como opciones sobre contratos futuros de bonos. Para tal efecto, el académico modificó las ecuaciones (3) y (4), cambió la nomenclatura de algunas variables e hizo modificaciones estructurales, tal como se muestran en (5) y (6):

$$C = e^{-rT}[FN(d_1) - KN(d_2)] \quad (5)$$

o

$$P = e^{-rT}[KN(-d_2) - FN(-d_1)] \quad (6)$$

donde

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{F}{K}\right)+\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

F, es el precio *forward*[16] del bono subyacente en el momento *t*, *K*, el precio de ejercicio o *strike*, σ, la volatilidad del precio *forward* (o de la tasa de interés) y *T*, el vencimiento del contrato a plazo.

Lo complejo de esta variante radica en que en aras de tratar todo en términos del precio *forward*, los modelos de estructuras temporales de los tipos de interés se enlazan con el de Black 76 para valorar una opción sobre tipo de interés (para títulos de renta fija), por lo que el modelo finalmente queda resumido en las expresiones (7) y (8).

$$C = FN(d_1) - KN(d_2) \quad (7)$$

$$P = KN(-d_2) - FN(-d_1) \quad (8)$$

siendo

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{F}{K}\right)}{V} + \frac{1}{2}V$$

$$d_2 = d_1 - V$$

$$V = \sigma B(t,T)\sqrt{\frac{1}{2}\frac{(1-e^{-2at})}{a}}$$

$$F = P(0,T)$$

$$K = P(t,0)P(t,T)$$

P(t,T), *B(t,T)* y *A(t,T)* son parámetros de evolución propios de los modelos de estructura a plazos que involucran la modelación de la tasa de interés y sus formulaciones varían según el modelo y sus supuestos. Algunos de los modelos más conocidos y tratados, son el de Vasicek (1977), Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991), entre otros. Cuando *t* y *T* toman el valor de cero en las expresiones anteriores, se generan las variables de salida *P(0,T)*, *P(t,0)*, *B(0,T)*, *B(t,0)*, *A(0,T)* y *A(t,0)*.

La descripción de las variables son las mismas; no hay variación alguna.

Conclusiones y recomendaciones

En este documento se presentó la transformación a la que se debió someter el modelo Black-Scholes (1973) para volverse Black-76 y valorar opciones sobre títulos de renta fija. En la deducción de la ecuación se implementó la siguiente ruta:

14. Un *cap* es un instrumento de gestión de riesgo del tipo de interés a medio y largo plazo que consiste en un acuerdo entre dos partes mediante el cual un prestatario se asegura el tipo máximo que se le aplicará a un préstamo a cambio del pago de una prima.
15. Un *floor* es lo contrario a un *cap*. En este contrato el comprador se asegura la rentabilidad mínima de un depósito a cambio de una prima.
16. Este precio se obtiene a partir de los modelos de estructura temporal de los tipos de interés tratados en diversos textos, como en Tuckman (2003), Martínez (2000), Herrera y Cárdenas (2010), entre otros.

- Introducción a la teoría de opciones.
- Exhibición del modelo convencional de Black-Scholes (1973).
- Explicación de las variantes del modelo.
- Mención de las características, supuestos, trascendencia y ejemplos.

El modelo BS (73) como tal, sentó un precedente importante en la economía y las finanzas, gracias a que ayudó a solucionar múltiples problemas financieros que persistieron por más de 70 años y contribuyó a darle un manejo científico al riesgo, aspectos que redundaron en un vertiginoso crecimiento y desarrollo de los mercados derivados. Su impacto fue tal que les permitió el reconocimiento del Nobel de economía a sus gestores en 1997, Fisher Black y Myron Scholes.

El modelo Black-76 y en general las formulaciones de Black-Scholes, están diseñados para calcular primas de opciones europeas, aspecto que puede verse como una debilidad en el evento de querer estimar una opción americana.

El modelo Black-76 puede complementarse con metodologías de estimación de la estructura a plazos de los tipos de interés, con el fin de obtener el precio *forward* de los títulos y calcular valores de primas más precisos.

El documento como tal, permite sentar un precedente importante en el proceso de maduración en cuanto al estudio y uso de instrumentos derivados sobre tipos de interés en Colombia.

Para efectos de investigaciones futuras, se podría abordar la aplicación de una metodología para valorar opciones americanas sobre tipos de interés, incluidos los modelos binomiales.

Bibliografía

- ALBANESE, C. and CAMPOLIETI, G., (2006). *Advanced derivatives pricing and risk management*. Oxford, UK: Elsevier Academic Press.
- ARANGO, L. E.; MELO, L. F. y VÁSQUEZ, D. M. (2002). "Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia". En: *Borradores de Economía* No. 196. Banco de la República.
- BACCHINI, R. D.; GARCÍA, J. I. y MÁRQUEZ, E. A. (2007). *Evaluación de inversiones con opciones reales utilizando Microsoft Excel*. Buenos Aires, Argentina: Omicrón Editorial.
- BEAUMONT, P. (2004). *Financial engineering principles a unified theory for financial product analysis and valuation*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- BENNINGA, S. and WIENER, Z. (1998). Binomial term structure models by benninga. *Mathematica in Education and Research*. Vol 7, No. 3, pp. 1 – 10.
- BLACK, F. and SCHOLES, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". En: *The Journal of Political Economy*, Vol 81, No. 3. may- jun.
- BLACK, F. (1976). "The pricing of commodity contracts". En: *Journal of Financial Economics*, No. 3.
- BLACK, F. and KARASINSKI, P. (1991). "Bond and option pricing when short rates are lognormal". En: *Financial Analyst Journal*, July-Aug.
- BLACK, F.; DERMAN, E. and TOY, W. (1990). One-factor model for interest rate option. *Financial Analyst Journal*.
- BLACK, F., DERMAN, E., and TOY, W. (1990). "A one-factor model of interest rates and its applications to treasury bond options". En: *Financial Analyst Journal*, Jan-Feb.
- Bolsa de Valores de Colombia (2011). *Informe anual. Mercados de la BVC 2010*.

– BRENNAN, M. and SCHWARTZ, E. (1979). "A continuous approach to the pricing of bonds". En: *Journal of Banking and Finance*, Vol 35.

– BRIGO, D. and MERCURIO, F. (2006). *Interest rate models - Theory and practice with smile, inflation and credit (2nd ed.)*. Berlin: Springer Verlag.

– BROOKS, C. (2008). Introductory *econometrics for finance (2nd. Ed.)*. New York, NY: Cambridge University Press.

– CARMONA, R. and DURRLEMAN, V. (2003). "Pricing and hedging spread options". En: *Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM – Review*. Vol 45, No. 4.

– CHANCE, D. (2003). *Analysis of derivatives for the CFA Program*. Baltimore, MD: Association for Investment Management and Research – AIMR.

– CHANCE, D. (2008). *Binomial pricing of interest rate derivatives*. Teaching Note 97-14.

– CHEN, R. and SCOTT, L. (1992). "Pricing interest rate futures options with futures-style margining". En: *The Journal of Futures Markets*. Vol 13.

– CHOUDHRY, M. (2005). *Fixed income securities and derivatives handbook, analysis and valuation*. Princeton, NJ: Bloomberg Press.

– COPELAND, T.; WESTON, J., and SHASTRI, K. (2005). *Financial theory and corporate policy (4th ed.)*. Bogotá: Pearson Education.

– COX, J. C.; ROSS, S. A. and RUBINSTEIN, M. (1979). "Option pricing: a simplified aproach". En: *Journal of Financial Economics*, 7.

– COX, J. C.; INGERSOLL, J. E. and ROSS, S. A. (1985). "A theory of the term structure of interest rates". En: *Econometrica*, 53 (2).

– DEWYNNE, J.; HOWISON, S. and WILMOTT, P. (1995). *The mathematics of financial derivatives*. New York, NY: Press Syndicate of the University of Cambridge.

– ERAKER, B. (2010). *The Vasicek Model*. Wisconsin School of Business. Teaching Notes.

– FABOZZI, F. (1996). *The handbook of fixed income options: strategies, pricing and applications (Revised edition)*. Chicago, IL: IRWIN Professional Publishing.

– FABOZZI, F. (2002). *The handbook of financial instruments*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

– GARMAN, M. B. y KOHLHAGEN, S. W. (1983). "Foreign currency option vales". En: *Journal of International Money and Finance*, 2.

– GRAJALES, C. A. y PÉREZ, F. O. (2008). *Modelo de tasa corta de Hull y White y valoración de bonos con opción call*. Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.

– HEATH, D.; JARROW, R. and MORTON, A. (1990). "Bond pricing and the term structure of interest rates: a discrete time approximation". En: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25.

– HEATH, D.; JARROW, R. and MORTON, A. (1992). "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation". En: *Econometrica*, Vol. 60.

– HERRERA, L. y CÁRDENAS, D. (2010). *Modelos de valoración de opciones sobre títulos de renta fija: aplicación al mercado colombiano*. Working paper. Universidad Icesi, Cali, Colombia; Illinois Institute of Technology, Chicago, IL, USA.

– HO, T. and LEE, S. (1986). "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims". En: *Journal of Finance*.

– HULL, J., and WHITE, A. (1990). "Pricing interest-rate-derivative securities". En: *The Review of Financial Studies*, Vol 3, No. 4.

– HULL, J. (2006). *Options, futures and other derivatives (6th ed.)*. Toronto: Prentice Hall.

– HULL, J. and WHITE, A. (1993). "One-factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities". En: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 28, No. 2.

- HULL, J. and WHITE, A. (1993). "Bond option pricing based on a model for the evolution of bond prices". En: *Advances in Futures and Option Research*, Vol. 6.
- ITÔ, K. (1951). "On stochastic differential equations". En: *Memoirs of American Mathematical Society*, Vol. 4.
- ILYA, G. (2006). *Fixed-Income Instrument Pricing*. Munich Personal RePEc Archive – MPRA.
- JULIO, J. M., MERA, S. J., y REVÉIZ, A. (2002). "La curva spot (cero cupón): Estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos". En: *Borradores de Economía* No. 213. Banco de la República.
- KLOSE, C. and YUANG, L. C. (2003). *Implementation of the Black, Derman and Toy model on bonds*. Seminar Financial Engineering, University of Vienna.
- KUEN, Y. (2008). *Mathematical models of financial derivatives (2da ed.)*. Springer Finance.
- LAMOTHE, P. (2003). *Opciones financieras y productos estructurados (2da ed.)*. Madrid: McGraw-Hill.
- LEIPPOLD, M. and WIENER, Z. (1998). *Algorithms behind term structure models of interest rates, valuation and hedging of interest rate derivatives with the Ho-Lee Model.*
- LONGSTAFF, F. and SHWARTZ, E. (1992). "Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model". En: *The Journal of Finance*, Vol 47, No. 4.
- MARTÍNEZ, J. (2000). "Modelos de no-arbitraje y modelos de equilibrio. Fórmulas de valoración de derivados de tanto de interés". En: *Anales de Economía Aplicada*. XIV Reunión ASEPELT – España, Oviedo. 22 y 23 de Junio.
- MARTÍNEZ, J. y PEDREIRA, L. (2000). *Valoración de títulos mediante el uso de los procesos estocásticos*. V Jornadas ASEPUMA. Universidad de la Coruña, España.
- MELO, L. F., y VÁSQUEZ, D. M. (2004). "Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones B-spline cúbicas". En: *Borradores de Economía* No. 210. Banco de la República.
- NELSON, C. and SIEGEL, A. (1987). "Parsimonious modeling of yield curves". En: *Journal of Business*, Vol. 70, No. 4.
- PEDRAJA, L., RODRÍGUEZ, E., y SERVER, R. (2000). "Modelo estocástico de Gauss-Wiener: Una aplicación a la economía financiera en el mercado de capitales de España". En: *Revista Facultad de Ingeniería, U.T.A.*
- RAMÍREZ, F. H. (2007). *Conceptos y construcción de la curva de rendimiento de TES en Colombia con las metodologías de Nelson-Siegel y Svensson*. Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.
- RESTREPO, D. A. y BOTERO, J. C. (2008). *Modelos unifactoriales de tipo de interés: aplicación al mercado colombiano*. Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.
- REUTERS (2001). *The Reuters Financial Training Series, Course on Derivatives*. Sant Andreu de la Barca, Espana: NOVOPRINT.
- SVENSSON, L. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates.* Sweden 1992 – 1994, NBER Working Paper No. 4871.
- TUCKMAN, B. (2002). *Fixed income securities: tools for today's market*. Toronto: Wiley.
- VAN DEVENTER, D. and IMAI, K. (1997). *Financial risk analytics.* New York: McGraw-Hill Companies.
- VASICEK, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177-188.
- WHALEY, R. (2006). *Derivatives markets, valuation, and risk management.* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.