

Análisis de las representaciones de los cálculos operacionales en la solución de un problema de movimiento uniforme*

Hugo Escobar¹

Rocío Abello Correa²

Jorge Castaño García³

Pontificia Universidad Javeriana (Colombia)

Recibido: julio 11 de 2019. Revisado: octubre: 6 de 2019. Aceptado: diciembre 13 de 2019

Referencia norma APA: Escobar, H., Abello, R., & Castaño, J. (2019). Análisis de las representaciones de los cálculos operacionales en la solución de un problema de movimiento uniforme. *Rev. Guillermo de Ockham*, 17(2), 9-28. doi: <https://doi.org/10.21500/22563202.4120>

Resumen

El artículo expone el análisis de las representaciones de doce participantes respecto del cálculo operacional al manipular las variables de velocidad, tiempo y distancia y su relación, en la solución de un problema de proporcionalidad presentado por el *software* URANUS v1 y tres tareas de control. Se utilizó el método microgenético para analizar los patrones de ejecución y entrevistas semiestructuradas para inferir por análisis de contenido de las verbalizaciones las representaciones respectivas. Se ilustran tres casos: novato, intermedio y experto, quienes utilizaron diversos cálculos de adición, multiplicación y proporcionalidad y distintas relaciones entre variables, desde la ausencia de nexos, hasta concebirlas interrelacionadas respecto de la distancia. Cinco sujetos intermedios presentaron la representación tipo R3 de cálculos aditivos con relación entre las variables que produce efectos y un experto reveló la representación tipo R5 de cálculo proporcional. En síntesis, la solución del problema exige complejas interacciones, sujeto, tarea y contexto social educativo.

Palabras clave: representaciones, solución de problemas, novatos y expertos, cambio cognitivo, educación.

Analysis of representations of operational calculations in the solution of a uniform movement problem

Abstract

This article exposes the analysis of the representations of twelve participants regarding the operational calculation when manipulating speed, time, and distance variables, and their relationship in the solution of a proportionality

* Artículo producto de la investigación *Caracterización del cambio como novedad cognitiva en la solución de un problema físico-matemático de proporcionalidad en resolutores de diverso grado de escolaridad y diverso grado de experticia*. ID 05950, financiada por la Vicerrectoría de Investigación de la Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, D.C., Colombia. La investigación pertenece a la línea de investigación Desarrollo y Procesos Cognitivos en Contextos, del Grupo de Investigación Desarrollo, Afectividad y Cognición.

1. Psicólogo de la Universidad del Valle, Cali, Colombia. Magíster en Psicología, Pontificia de la Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: escobarh@javeriana.edu.co
2. Psicóloga de la Universidad Javeriana. Magíster en Desarrollo Educativo y Social del Cinde y la Universidad Pedagógica Nacional. PhD en Ciencias Sociales Niñez y Juventud del Convenio Cinde-Universidad de Manizales. Correo electrónico: abellor@javeriana.edu.co
3. Licenciado en física y matemáticas de la Pontificia Universidad Javeriana. PhD, de la Universidad Autónoma de Barcelona. Correo electrónico: castanoj@javeriana.edu.co



problem presented by the Uranus v1 software and three control tasks. The microgenetic method was used to analyze the performance patterns together with semi-structured interviews, in order to infer throughout the content analysis of the verbalizations, the respective representations. Three cases are illustrated: beginner, intermediate, and expert, which used various addition, multiplication, and proportionality calculations, along with different relationships between variables from the absence of links to conceiving them interrelated concerning distance. Five intermediate subjects presented the R3 type representation of additive calculations concerning the variables that produce effects. An expert also revealed the R5 type representation of proportional calculation. In synthesis, the solution of the problem requires complex interactions, subject, task, and educational social context.

Keywords: representations; problem solving; beginners and experts; cognitive change; education.

Introducción

En el marco de la denominada crisis de la enseñanza de las ciencias, la solución de problemas es un campo promisorio que requiere investigación para acopiar argumentos sobre las relaciones entre el desarrollo, el aprendizaje y sus implicaciones para la enseñanza, a fin de enfrentar las graves problemáticas de fracaso escolar y favorecer el desarrollo cognitivo y la calidad de una educación equitativa e incluyente. A partir de los resultados de una investigación anterior (Autor 1; Autor 2; Autor 3; 2016) en la que se establecieron diferentes tipos de procedimientos frente a la solución de un problema de proporcionalidad, relativos al control de variables y la covariación, se decidió explorar la relación entre procedimientos y los significados representacionales que involucraran operadores matemáticos adecuados para algún tipo de cálculo, ya que esta relación podría arrojar ideas acerca del papel de tales representaciones como factor explicativo de los diversos patrones de ejecución.

En este contexto, la pregunta que orientó la investigación realizada fue la siguiente: ¿qué tipos de representaciones verbales de operadores matemáticos involucrados en la solución de un problema se pueden inferir y en qué medida explican los procedimientos ejecutados por los sujetos estudiados?

A continuación, se examinan diversos planteamientos teóricos sobre la solución de problemas de proporcionalidad, las representaciones de corte psicológico en términos de significados representacionales de los cálculos operacionales susceptibles de hacer, el desarrollo cognitivo como cambio dinámico que implica transformaciones, trayectos y trayectorias diversas que permiten comprender que los de individuos son diversos y activos y el cambio conceptual en el contexto escolar.

Solución de problemas de proporcionalidad

Las investigaciones sobre solución de problemas de proporcionalidad desde la perspectiva de Piaget & Inhelder

(1972) muestran las dificultades de los niños y jóvenes para establecer las coordinaciones involucradas entre magnitudes relacionadas proporcionalmente (directa e inversa). Los niños logran coordinaciones cualitativas del tipo ejemplo: al aumentar una magnitud, aumenta la otra, o al disminuir una la otra disminuye. Ya un poco mayores hacen coordinaciones cuantitativas de tipo aditivo pero sin llegar plenamente a coordinaciones de tipo multiplicativo, por lo cual se debe esperar lo que desde esta perspectiva se llamó el estadio de las operaciones formales para alcanzar este último tipo de coordinaciones.

Existe un buen número de trabajos que discuten que sea suficiente la posesión de las estructuras formales para garantizar el manejo de la proporcionalidad. Aguilar, Navarro, López, & Alcalde (2002) en una muestra de estudiantes de cuarto año de secundaria, encuentran que si bien los estudiantes clasificados como de mayor nivel de desarrollo formal mostraron ser más capaces de resolver problemas matemáticos, apenas un poco más de la tercera parte resolvieron correctamente problemas que involucraban proporcionalidad.

Un número importante de trabajos desde otras perspectivas, muestran la dificultad de los estudiantes para enfrentar problemas que involucran un pensamiento proporcional. Los estudios coinciden en que este pensamiento se desarrolla mucho más lentamente de lo que se suponía. Incluso hay evidencias de que gran parte de las personas adquieren deficientemente las habilidades relacionadas con este tipo de pensamiento. Los estudiantes de secundaria en su mayoría aprenden reglas de memoria que los capacitan, en el mejor de los casos, para resolver problemas rutinarios, pero que aplican con dificultad en situaciones prácticas o medianamente novedosas comparadas con aquellas en las que recibieron entrenamiento escolar (Ojose, 2015, Tourniaire, 1986, Hoffer, 1988, Wahyuningrum, & Suryadi, 2017, Cortina, Visnovska, & Zuniga, 2014). Modestou, Elia, Gagatsis & Spanoudis (2008) ponen en evidencia las dificultades de los estudiantes para diferenciar entre variación proporcionalidad y lineal. Lawton (1993) muestra los vacíos que los estu-

diantes universitarios tienen para resolver problemas que requieran razonamiento proporcional.

El desarrollo no acabado de este tipo de pensamiento obstaculiza la comprensión de gran variedad de conceptos de diferentes disciplinas, tanto de las ciencias naturales como de las ciencias sociales y humanas. Esta evidencia del desarrollo del razonamiento proporcional posiblemente tenga que ver más con las formas de enseñanza escolar que con las condiciones cognitivas de los estudiantes y de su desarrollo. Una enseñanza basada en una segmentación de conceptos y en una excesiva secuenciación de los currículos termina por convertirse en un obstáculo para que los estudiantes se hagan al panorama general y establezcan interrelaciones adecuadas entre conceptos. Randall (2005) considera que la enseñanza de la matemática debe basarse en apoyar la construcción por parte de los estudiantes de grandes ideas, para evitar, precisamente, que la matemática sea vista como un conjunto desconectado de habilidades y de hechos.

En un estudio de la resolución de problemas de proporcionalidad, Hart (1985) muestra que la variabilidad en el desempeño intrasujeto depende de factores como el contexto en términos de la familiaridad con el contenido de la tarea; el tipo de magnitudes involucradas, sean discretas o continuas, y la estructura numérica en términos de razones enteras o no. Cramer & Post (1993) identificaron estrategias correctas de solución usando razón unitaria, factores de cambio, fracciones y producto cruzado. En el análisis del desempeño en problemas de proporcionalidad, Touniare & Pulos (1995) señalaron errores causados por ignorar datos fundamentales y el uso de estrategias de adición o diferencia en las que la comparación multiplicativa era más apropiada.

Investigaciones del razonamiento proporcional en expertos y novatos muestran que los resolutores difieren en las reglas computacionales que utilizan para resolver los problemas (Sanz, Pozo, Pérez & Gómez, 1996, p.347). Rapetti (2003), encuentra que ciertos problemas en los que se involucran la proporcionalidad entre magnitudes diferentes resultan muchos más fáciles para los estudiantes que los que involucran magnitudes únicas y, además, que las estrategias de resolución son variadas y se asocian más a un tipo de problemas que otros, “así la división para la comparación de magnitudes diferentes, el porcentaje para aquellos casos en que se compara la parte con el todo” (p. 70).

De acuerdo con Obando, Vasco & Arboleda (2013), se afirma que las razones, proporciones y proporcionalidad son temáticas de la mayoría de los currículos del mundo.

Sin embargo, los análisis de Vergnaud (1988, 1994) y de Adjage, R. y Pluvineage (2007), de acuerdo con Obando *et al.* (2013), muestran que los estudiantes presentan dificultades en el manejo de estos conceptos, lo cual exige investigación en este campo.

Obando *et al.* (2014) en el estado del arte que elaboran sobre la enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad, afirman que se requiere mayor investigación para “comprender mejor las filiaciones y rupturas, las líneas de continuidad o los saltos cualitativos entre lo aditivo y lo multiplicativo, de tal forma que los procesos escolares se puedan orientar a potenciar la transformación cualitativa de los razonamientos aditivos hacia razonamientos multiplicativos” (p. 73).

Representaciones y operaciones

De acuerdo con Duval (2004), se afirma que la noción de representación se ha presentado en la literatura especializada en el estudio de la cognición humana de tres formas diferentes: como representación mental en los estudios de Piaget, como representación interna o computacional en los enfoques de procesamiento, y como representación semiótica en la lingüística. Para este caso, la tarea inferencial respecto de las representaciones verbales de los operadores matemáticos involucrados en la solución de un problema, se aborda como creencias psicológicas proporcionadas por los participantes a través de sus verbalizaciones en las entrevistas realizadas. Dichas representaciones tienen la cualidad de constituir relaciones de conjunto entre los signos, los referentes o referencias y los significados.

Las representaciones resultan del establecimiento de relaciones entre sus elementos y en tiempo real constituyen un todo que no se puede desagregar, pues están compiladas y funcionan como significados representacionales. Los signos o marcas son los medios de representación o expresiones en un determinado registro de representación semiótica, como los denomina Duval (2004); el referente/referencia corresponde a lo representado, por ejemplo, objetos, conceptos, mapas, entidades, situaciones presentes reales o imaginadas, y el significado lo constituye la producción semiótica en términos de cadenas de expresión y contenido, como concepto mental.

Para la presente investigación, el significado representacional da cuenta del cálculo operacional llevado a cabo por el resolutor, inserto en el marco de un sistema semiótico numérico, que para el caso particular de la resolución del problema, es la proporcionalidad simple. La emergencia del concepto mental y singular del cálculo operacional

efectuado por un resolutor, no es lineal o de vección fija. El sujeto se vale de un conjunto de signos o marcas identificables y actualizables que son referentes o referencias de alguna cosa, objeto o entidad. Entre los signos como marcas y los referentes como objetos o entidades, se da una vección y transformación recíproca entre un sistema numérico y uno gráfico. El significado como concepto mental del cálculo operacional, emerge permanentemente con actualizaciones y modificaciones frente a las posibles soluciones del problema.

La actividad cognitiva del sujeto circula, en consecuencia, entre signos (marcas), referentes (objetos) y significados (conceptos), y en ese devenir el significado representacional del cálculo numérico y de la relación entre las variables de velocidad, tiempo y distancia se expande y transforma más allá del significado inicial. Los sujetos deben poseer esquemas cognitivos previos (preconcepciones o teorías ingenuas) que en su relación con las tareas se actualizan y de esta manera posibilitan la emergencia de representaciones específicas y singulares. En esta perspectiva, el sistema semiótico que coadyuva en la solución de un problema está anclado bajo las condiciones de desarrollo cognitivo del sujeto, lo que ha implicado (o no) conocimientos previos relativos al problema, experticia en el dominio del conocimiento particular y de las características de la tarea en lo relacionado con la incógnita que se ha de despejar (Autor 1, *et al.*, 2016).

Desarrollo y novedad cognitiva

El desarrollo cognitivo como expresión de lo nuevo en términos de formas autoorganizadas en interacción con el medioambiente, evidencia la participación de múltiples causas en defecto de la hipótesis de un solo factor como control central. Variaciones de la conducta instaladas en bucles de interacción, muestran que al resolver problemas los sujetos utilizan mecanismos de retroalimentación, controlan de alguna forma las variables en juego, aíslan dimensiones en términos de constantes y constituyen comportamientos promedios a largo plazo, mediatizados por atractores centrales (Montes, J.; van Dijk, M.; Puche, N.; van Geer, P.; 2015). En estos términos, es posible modelar el desarrollo cognitivo bajo trayectos y trayectorias cambiantes caracterizados por transiciones que permiten hablar de sistemas oscilares flexibles, sujeto de desarrollo mirado como una organización débilmente ensamblada, en la que la naturaleza del avance se mediatiza por la interacción de los diversos factores del desarrollo en juego.

A partir de los trabajos derivados de la concepción epistemológica del modelo de Lotka y Volterra (1925) de interacción predador-presa, se asiste a una perspectiva no lineal de la relación entre dimensiones. En este caso, por ejemplo, la experticia, las operaciones, estrategias, representaciones y demás instrumentos que caracterizan la cognición por una parte, y por la otra, el medioambiente tal como la estructura de los problemas, sus contenidos y la cultura que refieren, entre otras variables. El escenario es el siguiente: el sujeto se enfrenta a un problema bien sea en la cotidianidad o en el laboratorio y allí perviven enfrentadas las cogniciones con los problemas en la búsqueda de las soluciones.

Lewis (2000, p. 36), traduce el desarrollo como “un proceso capaz de explicarse por la emergencia espontánea y coherente de formas de orden superior a través de interacciones recursivas entre componentes más simples. El mecanismo que permite la emergencia de lo nuevo es la autoorganización”. Cambios graduales, abruptos y aún inesperados, se manifiestan como los de mayor interés investigativo en esta concepción de la psicología del desarrollo, en la que la transición emerge como el objeto de estudio privilegiado sin dejar de lado, naturalmente, el mecanismo del cambio.

Emergencia de nuevas formas de solución de problemas, en este caso distintos usos del control de variables y de covariación (Autor 1, *et al.* 2016), podrían explicarse por medio del devenir de procesos propios al sistema donde interactúan los sujetos. Los problemas poseen una estructura lógica intrínseca, un contenido plausible y un anclaje cultural y el sujeto al principio podría no resolverlos, en seguida resolverlos de formas más o menos deficientes y más tarde eficientes, caleidoscopio de sucesos como “la emergencia de nuevas formas, las fases de estabilidad e inestabilidad, el cambio continuo y discontinuo, y la diferenciación entre trayectorias individuales” (Lewis, 2005, p. 247).

El cuadro general del desarrollo cognitivo manifiesta, en consecuencia, momentos de estabilidad, transiciones diferenciales y la emergencia a más largo plazo de patrones de trayectos y trayectorias de corte oscilar y no lineal. Un sujeto puede, por lo tanto, presentar en algún momento la coexistencia de estados distintos de comportamiento, aun contradictorios y más tarde una estabilidad. Esta perspectiva teórica implica seguir de forma microgenética las interacciones de los elementos del sistema y las abstracciones que emergen como comprensiones provisionales frente a los problemas.

El desarrollo psicológico es dinámico, multicausado, multidimensional, singular histórico-cultural e integral, lo que implica en el dominio cognitivo cambio, variabilidad intra e intersujeto, múltiples rutas de trayectos y trayectorias, diversidad intrasubjetiva e intersubjetiva, mediaciones socioculturales e históricas y condiciones afectivas y motivacionales, por lo que se distancia críticamente de las edades biológicas, la linealidad y las estadializaciones (Lerner, 2006). Se reconoce, en consecuencia, que el desarrollo es un proceso que enfatiza los cambios sistémicos y las transformaciones espacio-temporales producto de complejas interacciones entre biología y cultura que permiten despliegues de múltiples trayectos y trayectorias de socialización (Vasco y Henao, 2008).

En lo que tiene que ver con las relaciones entre desarrollo y aprendizaje, se plantea que el aprendizaje potencia el desarrollo y el desarrollo impulsan el aprendizaje. En esta perspectiva, aprendizaje y desarrollo interactúan entre sí y convergen en la génesis de las distintas trayectorias de vida de un sujeto.

Las reflexiones anteriores sobre cambio cognitivo se conectan en seguida, con los trabajos contemporáneos relativos al cambio conceptual instalados en las relaciones del desarrollo psicológico y el aprendizaje, en el contexto de lo educativo como fenómeno complejo, multidimensional y multicausado.

Una aproximación como la descrita exige profundizar con base en la psicología del desarrollo sobre el cambio cognitivo y una apertura al diálogo interdisciplinar en donde se reconoce que el cambio conceptual y sus implicaciones educativas son de interés para la psicología, la filosofía de la ciencia, la historia y la epistemología (di Sessa, 2014).

Cambio conceptual

El concepto de cambio conceptual irrumpió en la psicología educativa a partir del debate clásico que introdujo Kuhn (2000) para referirse a las transformaciones de los conceptos integrados en una teoría científica cuando el paradigma cambia. Las transformaciones de los paradigmas “son revoluciones científicas y la transición sucesiva de un paradigma a otro por medio de una revolución es el patrón usual de desarrollo de una ciencia madura” (Kuhn, 2000, p. 36), que una vez aceptado debe demostrar una mayor potencia explicativa sobre la de sus competidores, proceso de cambio revolucionario que se extiende desde la evidencia de las anomalías, la formulación de nuevas teorías, los cambios en las normas que rigen los problemas

y explicaciones admisibles, la sustitución de los criterios que legitiman los problemas y las soluciones, todo ello instalado en el marco de presiones socioculturales, económicas y políticas (Kuhn, 2000).

El cambio conceptual en el ámbito educativo referido a las ideas científicas, es diferente del cambio cognitivo relativo a las ideas ingenuas en el sujeto y ha venido ganando protagonismo en los debates contemporáneos de las ciencias de la educación, en los que ya se tiene un consenso sobre la necesidad de investigarlo a fondo, dado que para muchos estudiantes es muy difícil el aprendizaje de conocimientos científicos, además de demostrarse la ineficiencia de los métodos tradicionales que enfatizan la acumulación de información (Poso 2009; di Sessa, 2014; Vosniadeu 2007-2013).

Poso (2009), plantea la existencia de tres procesos de cambio conceptual desde la periferia de la teoría hasta su núcleo central, lo que supondría finalmente una reestructuración fuerte:

Suelen diferenciarse al menos tres procesos de cambio conceptual en un dominio dado. La forma más leve de cambio conceptual sería el *enriquecimiento* o crecimiento de las concepciones, simplemente incorporándoles nueva información, pero sin cambiar en absoluto la estructura conceptual existente. El *ajuste* ya implicaría modificar esa estructura de alguna manera, fundamentalmente por procesos de generalización y discriminación, pero no requeriría un cambio radical de las estructuras existentes. Este cambio radical se produciría con la *reestructuración*, una nueva forma de organizar el conocimiento en un dominio que resulte incompatible con las estructuras anteriores... ese cambio conceptual o reestructuración será necesario cuando la superación de las teorías alternativas en un dominio dado requiera adoptar nuevos supuestos epistemológicos, ontológicos y conceptuales desde los que interpretar los escenarios y situaciones en ese dominio (p. 143).

De acuerdo con Pozo (2009), adicionalmente se requiere enfrentar al aprendiz a conflictos cognitivos en el orden tanto factual como conceptual y estos ocurren cuando el estudiante confronta sus teorías con hechos o con otras teorías a fin de tomar consciencia de lo erróneo de sus suposiciones, lo que deviene en una movilización y reestructuración de sus ideas previas.

Las diversas definiciones de cambio conceptual convergen en términos de pasar de piezas relativamente asiladas producto del disturbio que producen las nuevas ideas, a integraciones en sistemas más amplios y complejos de conocimiento estructurado, en coherencia relativa con las ideas previas (Vosniadou, 2013; di Sessa, 2014),

significativamente influenciado por factores sociales y situacionales e igualmente se reconoce que son diversas las modalidades de cambio conceptual dentro de un mismo dominio y entre distintos dominios de conocimiento (di Sessa, 2013).

Vosniadou (2013) enfatiza que se tienen cuatro condiciones fundamentales para que se dé el cambio conceptual: “(...) debe haber insatisfacción con concepciones existentes. Debe haber una nueva concepción que sea inteligible. La nueva concepción debe parecer ser plausible. De la nueva concepción debe sugerir la posibilidad de un programa fructífero” p. 11). Dicho autor critica el conflicto cognitivo de reduccionista dado que no contempla las ideas productivas, básicas para la construcción de conceptos más complejos, y se centra solo en los errores.

Aprendizaje enseñanza de la ciencia y contextos socioeducativos

Aprender ciencias y afrontar el cambio conceptual por parte de los estudiantes, requiere procesos de educación direccionados intencionalmente a la construcción de conceptos científicos, proceso educativo que debe tener en cuenta las teorías ingenuas que las personas poseen en los distintos dominios del conocimiento. Dichas teorías son diferentes de las teorías científicas en el sentido de que no son explícitas, carecen de poder explicativo, no tienen la consistencia de las teorías científicas, no son metacognitivamente conscientes, no pueden ser probadas o falseadas y no son socialmente compartidas.

Las teorías del cambio conceptual enfrentan teóricamente dos orientaciones, a saber, la de la fragmentación y la de la coherencia, cada una de ellas heredadas de las reflexiones de Kuhn y Toulmin respectivamente (di Sessa, 2014).

Desde la década de los noventa, en el campo de los estudios sobre conocimientos erróneos se afirma que las ideas ingenuas en la física son extremadamente coherentes en el mismo sentido que lo son las teorías científicas, pero en la actualidad y desde la perspectiva de la fragmentación se defiende la idea de hebras que requieren tejerse más fuertemente y se afirma que hay relaciones diferentes a la coherencia —por ejemplo, en el aprendizaje de las matemáticas— que implican la deducción que requiere comprobación empírica, plausibilidad y uso mutuo, abstracciones comunes y alineamiento categorial (di Sessa, 2013). En este contexto, las teorías ingenuas se reconocen como diferentes a las teorías científicas, menos articuladas,

carentes de conocimiento metacognitivo y menos coherentes. En el proceso de construcción de conocimiento se pasa de piezas relativamente aisladas a su integración en sistemas más amplios y complejos de conocimiento estructurado. De esta forma las teorías ingenuas tienen una relativa coherencia, están caracterizadas por relaciones de cierta causalidad y son generativas en el sentido de que permiten ciertas predicciones y explicaciones.

Por el lado de las fragmentaciones, estas se dan cuando el estudiante simplemente adiciona información sin considerar la coherencia de lo nuevo con lo previo. Los conocimientos erróneos surgen cuando las comprensiones científicas no se alcanzan y se distorsionan, creando así lo que Vosniadou (2013) ha denominado concepciones sintéticas, las cuales son innovadoras frente al problema de la inconmensurabilidad entre lo nuevo y lo previo. En este sentido, las concepciones sintéticas o híbridas representan un progreso importante en el proceso de construcción de conocimiento y son modelos situacionales en los que se hace necesario tratar con las demandas de la situación específica.

El debate entre coherencia y fragmentación aporta elementos de análisis para comprender las diferencias entre novatos y expertos. De acuerdo con di Sessa (2013), los novatos, a diferencia del experto, tienen dificultades para conectar las ideas ingenuas sobre un fenómeno. Según Vosniadou (2013), los novatos tienen un sistema de conocimiento de colecciones inestructuradas de diversos conocimientos denominados p-prims, originados en comprensiones superficiales de la realidad.

Puede plantearse, entonces, la diferenciación entre “mecanismos abajo arriba, conservadores, aditivos y ampliamente inconscientes, de mecanismos arriba abajo, radicales, deliberados y de aprendizajes intencionales”, que expresa Vosniadou (2007, revisado en 2014, p. 50) para diferenciar los mecanismos de cambio que utilizan diferencialmente los novatos y expertos.

“El uso de mecanismos simples como procesamiento abajo arriba, o aditivos es lo que se conoce como cambios conceptuales espontáneos...” (Vosniadou, 2007 revisado en 2014, p. 50) que tienen lugar en espacios naturales y están mediados por la cultura. Estos cambios espontáneos pueden llevar a concepciones erróneas. Las comprensiones producen modelos híbridos o sintéticos. Ello se da porque los novatos solo cambian parte y no el todo de sus creencias, no tienen conocimientos explícitos y por ello no comprenden las contradicciones e inconsistencias ni las distorsiones que crean entre las teorías ingenuas y las explicaciones científicas.

Desde la perspectiva de los expertos, los cambios en las comprensiones de conceptos científicos exigen un comportamiento similar al científico que lleva a cabo verdaderas pruebas de hipótesis, experimentación reflexiva, uso de analogías plausibles, modelamiento y representaciones externas (Vosniadou, 2007, revisado en 2014).

Este proceso requiere un procesamiento arriba abajo deliberado, además de mecanismos de aprendizajes intencionales. En el cambio conceptual el sujeto se confronta con marcos conceptuales que explican de forma diferente los fenómenos, compara las teorías científicas con sus concepciones ingenuas y evidencia las contradicciones e inconsistencias que lo movilizan hacia nuevas construcciones intencionales, tanto del contenido como de sus aprendizajes, lo que significa una metacognición estructural que potencia comprensiones y explicaciones del fenómeno con un necesario soporte sociocultural (Vosniadou, 2007, revisado en 2014).

Objetivo

Clasificar los distintos tipos de representaciones verbales utilizadas en los cálculos involucrados en la solución de un problema e inferir en qué medida explican los procedimientos ejecutados por los sujetos estudiados.

Metodología

Tipo de estudio

La presente indagación, que forma parte de una investigación mayor, constituyó un estudio de tipo cualitativo centrado en el análisis microgenético por segmentos que se hizo del proceder del sujeto al resolver el problema y en el análisis de contenido de la enunciación verbal, que permite inferir los significados representacionales de los cálculos que involucran operadores matemáticos y relaciones entre variables en la solución del problema. El modelo que a continuación se presenta, es el resultado mixto de categorías tanto deductivas como inductivas.

De acuerdo con Puche-Navarro (2008), quien cita a Siegler (2000 & 2004), se plantea que el propósito de los estudios microgenéticos es acercarse detalladamente a los procesos, a fin de reconstruir los procedimientos para la resolución de los problemas con el objeto de dar cuenta de la novedad cognitiva. Para este análisis, el proceder que sigue el resolutor se caracteriza según dos dimensiones: control y covariación. La primera se refiere al hecho de mantener (o no) constante el valor de una variable por dos o más intentos mientras se cambia el valor de la

otra; y la segunda se refiere a la sucesión de valores que alcanza la distancia D en una secuencia de intentos. El proceder del sujeto se estudia según cada dimensión y se segmenta según el tipo de regularidad presentada. Un segmento está constituido por una sucesión de intentos que mantiene el mismo tipo de control o de covariación. Una sucesión de segmentos constituye un trayecto. La sucesión total de intentos es la trayectoria (autor 1 *et al.* 2016). Los tipos de control identificados son: a. no control; b. control simple de dos intentos; c. control simple mayor a dos intentos; d. control con alternancia; e. cambio controlado y de covariación; f. no covariación; g. covariación creciente; h. covariación decreciente, e i. covariación mixta (autor 1 *et al.*, 2016).

El análisis de contenido como método de investigación cualitativa, surge como alternativa para explorar de manera sistemática material simbólico diverso. Responde a la necesidad del investigador de inferir la estructura interna de una información bien sea en términos de sus elementos e interrelaciones o sus dinámicas (López, 2002). En consecuencia, con dichos propósitos, se analizaron las enunciaciones verbales de los resolutores, a partir de las cuales se establecieron y clasificaron las distintas maneras de significados representacionales de los operadores matemáticos involucrados en la solución de la tarea problema.

No se desconoce que todo proceso inferencial está filtrado por el investigador, lo que exigió un acuerdo unánime entre los investigadores sobre la clasificación hecha para garantizar la validez de los análisis.

Procedimiento de la investigación

- Aplicación de la tarea y de las tareas de control a una muestra de doce casos.
- Análisis microgenético del proceder del resolutor por segmentos, de acuerdo con los criterios establecidos para control de variables y covariación.
- Análisis del contenido de las enunciaciones verbales e inferencia de los significados representacionales de los cálculos matemáticos usados frente a las variables, a partir de las enunciaciones verbales de los resolutores.
- Clasificación y validación de acuerdo con la rejilla modelo clasificatorio de significados representacionales y relación entre variables.
- Establecimiento de la relación entre representaciones verbales y procedimientos.

Participantes

Doce estudios de caso, de diferente edad (11 a 22 años), estudios (5° de primaria a último semestre de pregrado universitario y maestría), experticia y semejante nicho cultural. Los escolares participantes provienen de una institución educativa de la ciudad de Bogotá, en la que la Facultad de Psicología de la Pontificia Universidad Javeriana efectúa prácticas de profesionalización. Los sujetos fueron informados de los propósitos de la investigación y aceptaron participar voluntariamente. Como se planteó para este artículo, de los doce casos se citan tres, correspondientes a un novato, uno de tipo intermedio y un experto, para ilustrar los análisis hechos.

Instrumento/tarea

Software URANUS desarrollado en la investigación más amplia (autor 1 *et al.* 2016) y actividades de control: “La tarea-problema que se propuso resolver en este estudio es un típico problema de movimiento rectilíneo de velocidad constante. Específicamente, consiste en determinar la velocidad constante que debe imprimirse a un móvil y el tiempo que debe durar el evento-movimiento para cubrir una distancia que previamente se fija sobre un segmento de recta. Tanto la velocidad y el tiempo son dados en valores escalares (es decir, se da el valor que indica su extensión sin ninguna unidad). El resolutor debe determinar la velocidad (V) y la duración del movimiento (T) de un móvil para que este recorra la distancia D que separa el punto de partida y el punto de llegada (la meta) con un error de más o menos el 2.5 % de la distancia D. Se pueden hacer hasta quince intentos para ejecutar la tarea” (autor 1, *et al.* p. 13).

Figura 1
Interfaz del *Software* URANUS V₁



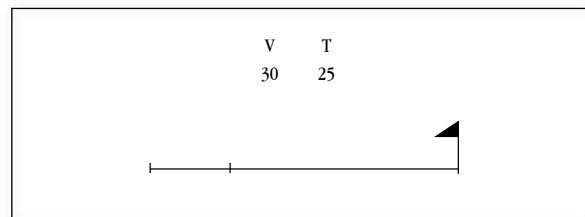
Para explorar, ampliar y corroborar las soluciones del resolutor ante el problema de proporcionalidad propuesto, se aplicaron tres tareas de control.

Figura 1
Situación control 1

Intento	V	T
1	40	20
2	40	30
3	40	50
4	40	65
5	40	70
6	40	60

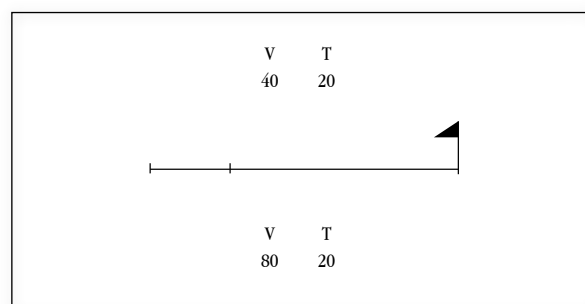
E: “Se muestra lo que hizo otro niño. En el primer intento puso velocidad 40 y tiempo 20; en el segundo intento puso velocidad 40 y tiempo 30; en el tercer intento puso 40 y tiempo 50; en el cuarto intento puso velocidad 40 y tiempo 65 (con estos últimos valores queda cerca de la meta); en el quinto intento pone velocidad 40 y tiempo 70 y ahí se pasa de la banderita, y en el sexto intento pone 40 de velocidad y tiempo 60. ¿Qué piensas de esos dos valores?”. Con esta tarea se busca identificar si el resolutor puede anticipar el valor adecuado de T que ha de ser mayor que el dado a T en el intento n, pero menor que el dado en el intento n + 1.

Figura 2
Situación control 2



E: “En esta situación el niño puso velocidad 30 y tiempo 25 y al poner esos valores la barra se le movió hasta acá (el entrevistador señala la rayita indicada en la gráfica). Si te dijera que en un segundo intento tendrías que poner los valores para que llegue a la meta, o por lo menos lo más cercano a la meta ¿qué valores pondrías?”. Se busca identificar si el resolutor establece relaciones entre la distancia recorrida con la totalidad de la distancia a recorrer para determinar los valores de V y T y el tipo de relación.

Figura 3
Situación control 3



E: “En este la persona puso velocidad 40, tiempo 20, y llegó acá (E: señala la rayita indicada en la gráfica). ¿Qué pasaría si ponemos velocidad 80 y tiempo 20? A dónde crees que llegaría?”. Esta tarea es complementaria a la anterior. Busca precisar si la solución ofrecida en la tarea anterior es una aproximación meramente aditiva o multiplicativa o si es proporcional.

Para el análisis de contenido de los significados representacionales de las operaciones y la relación entre variables se tuvieron en cuenta los tipos de operadores matemáticos posiblemente aplicados a la solución del problema y cinco clases de significados representacionales emergentes a lo largo del análisis del material proporcionado por las entrevistas semiestructuradas. No se descarta que puedan existir otros más.

Posibles operaciones matemáticas aplicables a la solución del problema:

- A incrementos de V y T se producen incrementos de D . Si aumenta V aumenta D y si aumenta T aumenta D . Solución aditiva.
- D es directamente proporcional a V y a T . Si se duplica, triplica, cuadruplica, etc., V (o T) se duplica, triplica, cuadruplica, etc., D . Solución multiplicativa.
- Si $D_m = K$, que representa la distancia total que ha de recorrerse (desde el punto de partida hasta la meta, esta permanece constante de manera que $D = V \cdot T$ que se transforma en $K = V \cdot T$ y que puede leerse como que entre V y T existe una relación inversamente proporcional. Cuanto mayor es V se necesita menos tiempo y viceversa, pero además si se duplica, triplica, cuadruplica V , T , se reduce a la mitad, a la tercera, cuarta parte, para recorrer la misma distancia K . Solución proporcional (Tabla 1).

Tabla 1
Rejilla modelo clasificatoria de significados representacionales y relación entre variables

Clase	Significado representacional	Universo verbal para relaciones y finalidad	Tipo de cálculo	Relación entre variables	Efecto específico
R1	Significado representacional de cálculos aditivos sin relación entre variables y sin referir efectos específicos.	poco; poquito; mucho; más; menos; subir; bajar; quitar; agregar; poner; adicionar; restar. Sin relación bajo la preposición a ni conjunción y , “poco a.. y mucho a..”. Sin locución conjuntiva de finalidad “para que..”	Aditivo	Sin relación	Sin referir efectos
R2	Significado representacional de cálculos aditivos sin relación entre variables con referencia a efectos específicos.	poco; poquito; mucho; más; menos; subir; bajar; quitar; agregar; poner; adicionar; restar; mayor; menor. Sin relación bajo la preposición a ni conjunción y , “poco a.. y mucho a..”. Con locución conjuntiva de finalidad: “para que llegue/corra/camine/desplace	Aditivo	Sin relación	Con referencia a efectos
R3	Significado representacional de cálculos aditivos con relación entre variables que produce efectos específicos.	todas las anteriores aditivas, mediadas por una relación bajo la preposición a seguida de la conjunción y , “poco a.. y mucho a..”. Utilización de la locución conjuntiva de finalidad: “para que llegue/corra/camine/desplace/	Aditivo	Con relación	Con referencia a efectos
R4	Significado representacional de cálculos aditivos y multiplicativos y relación diferenciada entre variables que produce efectos específicos.	todas las anteriores aditivas; duplicar; triplicar; cuadruplicar. Relación bajo la preposición a seguida de la conjunción y , “poco a.. y mucho a..”. Utilización de la locución conjuntiva de finalidad: “para que llegue/corra/camine/desplace	Aditivo y multiplicativo	Con relación diferenciada	Con referencia a efectos
R5	Significado representacional de cálculos aditivos, multiplicativos y de proporción directa o inversa y relación diferenciada entre variables que produce efectos específicos.	todas las anteriores aditivas; tercera parte; cuarta parte; quinta parte; entre la mitad de. Relación bajo la preposición a seguida de la conjunción y , “poco a.. y mucho a..”. Utilización de la locución conjuntiva de finalidad: “para que llegue/corra/camine/desplace/	Aditivo, multiplicativo y proporcional	Con relación diferenciada	Con referencia a efectos

Resultados

Dadas las restricciones de espacio, se presentan con detalle los resultados de tres de los doce casos estudiados. Estos casos son típicos de los diversos significados representacionales estudiados. En las tablas 2, 3, 4 y 5 se muestran apartes de la entrevista en términos de las enunciaciones verbales, la inferencia de los operadores matemáticos utilizados y extractos de frases que expresan el universo lingüístico utilizado por los sujetos.

Para cada caso se presentan cuatro tablas. En ellas se describe el procedimiento general analizado de acuerdo con los criterios de control de variables y covariación y las respuestas dadas ante las situaciones de control que fueron aplicadas.

En las tablas se ilustra el análisis de los significados representacionales en función de los cálculos empleados

y de acuerdo con la tipología de categorías de análisis establecidas.

En este sentido, los resultados establecen qué tipos de operadores matemáticos utilizan los sujetos, las palabras utilizadas y las relaciones o no, entre las variables de velocidad, tiempo y distancia que caracterizan el problema aplicado.

CASO: JJR (11:00 años) quinto grado. Novato.

Caso JJR . Análisis microgenético respecto del procedimiento. Caracterización de la trayectoria según la dimensión control: (*dabe*) de control, con alternancia pasa a no control. Después vuelve a hacer un control simple de dos intentos y finaliza con cambio controlado. En la dimensión covariación: g. Un único segmento de covariación creciente.

Tabla 2
Análisis de contenido de resolución de la tarea

Procedimiento (*)			Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
INT	V	T	E ...¿Por qué pusiste estos valores en el primer intento?	Operador aditivo simple	...más o menos
1	15	7	JJR: ...porque pensaba que de pronto era cuánto yo me demoraba, cómo me iba más o menos.		...le subí
2	15	30	E: ¿Y acá en el segundo intento que dejaste igualito la V?	Operador aditivo simple	...iba a llegar antes
3	32	30	JJR: Pero le subí al tiempo.	Operador aditivo simple	...más velocidad
4	47	47	E: ¿Por qué?		..subirle más a la velocidad o a los minutos...
5	47	59	JJR: Porque de pronto podía. Pensaba que si le subía un poco más al tiempo iba a llegar antes.		... subirle a los dos a lo igual
6	48	60	JJR: A ver, ahí [tercer intento] sí pensé que de pronto necesitaba más velocidad porque ya me daba cuenta de que no era cuánto yo me durara sino que tenía que, que era otra cosa, ahí ya me di cuenta y le subí más.	Operador aditivo simple	...falta poquito le voy a subir a...
Porcentaje de aproximación a la meta			[...] JJR: Ese sí, ahí yo pensaba que en el tercero ya me iba a quedar bien, pero cuando vi que también me quedó mal el cuarto yo me puse a pensar ¿será que tengo que subirle más a la velocidad o a los minutos...?	Operador aditivo simple	
			JJR: Subirle a los dos a lo igual a ver si de pronto tenían que estar iguales		
			E: Ah listo, ¿y ahí llegamos?		
			JJR: El tiempo lo subí más porque de pronto a lo que le subiera el tiempo, tenía uno más tiempo para llegar...	Operador aditivo simple	
			E: Ah ok. Y ya en el último intento, en éste llegamos ya.		
			JJR: Yo pensaba, yo dije a lo que ya me falta poquito le voy a subir a, de 47 a 48 y de 59 a 60.		

(*) En la primera tabla se registran los valores dados a la velocidad y el tiempo. En la segunda el porcentaje de aproximación a la meta.

La Tabla 2 expresa la intuición de que a mayor valor de V o T se llega antes. Aparecen enunciados como: a) “A mayor tiempo se llega antes”. Se trata, entonces, de más tiempo para llegar y no de mayor distancia por recorrer. b) “No era cuánto duraba, sino otra cosa” que evidencian la ausencia de relación entre V y T; c) “...ahí yo pensaba

que en el tercero ya me iba a quedar bien, pero cuando vi que también me quedó mal el cuarto yo me puse a pensar, será que tengo que subirle más a la velocidad o a los minutos...”, enunciado que también indica que concibe a V y T sin relación entre sí.

Tabla 3
Caso JJR. Análisis de contenido situación de control 1

Situación de control				Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
Intento	Y	T		JJR: Porque éste número (V:65) es mayor que éste (V:60) y este (V:65) quedó cerca de la meta. Entonces, este (V:60) quedaría más atrás, la barra azul. Acá (V:60) debería haber puesto por ahí 68 o 67 más o menos.	Operadores aditivos simples	...V= 65 es mayor que V = 60 , quedaría más atrás..
1	40	20				
2	40	30				
3	40	50				
4	40	65	Queda cerca de la meta			
5	40	70	Se pasa de la meta			
6	40	60				

La Tabla 3 destaca que a mayor valor de V (siempre que sea menor que V=70, valor que supera la meta) más cerca está de la meta.

Tabla 4
Caso JJR. Análisis de contenido situación de control 2

Situación de control			Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
V	T		Primer intento 69 (dice basarse en los valores de la situación de control 1) con 40 - 69 podría haber llegado.		
30	25		Segundo intento E: ...V:20 y T:89. ...Se me ocurrió quitarle 20 a este (a V = 40 tomado de la solución a la primera tarea, le quita 20) y sumar, pasarle los 20 de este (a T= 69 de la solución de la primera tarea)	Operador aditivo (compensación aditiva entre V y T)	...quitarle ...sumar, pasarle los...

En la tabla anterior se observa que si se considera un par de valores que sirven (V=40 y T=69), se puede tener otro par que también es válido mediante cambios compensatorios aditivos (se quita 20 a V y se le agrega a T).

Tabla 5
Caso JJR. Análisis de contenido situación de control 3

Situación de control			Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
V	T		JJR: Por acá yo creo que más o menos. E: Haz la rayita. JR: Porque estos números se parecen mucho sino que se le suman es 40...	Operador aditivo	...más o menos...
40	20		JJR: Llegaría un poquito más lejos pero no creo que alcance a llegar a la meta. E: ... Si yo le pusiera aquí (V) 80 y acá le pusiera (T)40, ¿qué crees que me pasaría?		...más tiempo
V	T		JJR: Llegarías más lejos, llegarías por ahí hasta por acá más o menos... más tiempo		
80	20				

La Tabla 5 evidencia que a mayor valor de una de las variables se llegaría más lejos.

CASO: NE (18;00) grado once. Intermedio.

Caso NE. Análisis microgenético respecto del procedimiento Caracterización de la trayectoria según la dimensión control: *d* (control con alternancia); covariación: *g* creciente con tres intentos.

Tabla 6
Caso NE. Análisis de contenido de resolución de la tarea

Procedimiento			Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
INT	V	T	Porque pues a tal velocidad y pues al ver el tiempo, pues pensé que pues podría dar un valor equitativo a la... a la meta y que... si pensé que era el valor más aproximado para que fuera acertado. Para que se aproximaran más ya que el primer intento me dio siempre en una escala más un poquito más lejos de lo que esperaba, ¿sí? Entonces por eso mismo, quería como para que se aproximara más a ese valor hacia la meta, entonces coloqué... coloqué más valores para que, para que fuera más acertado. Ya que si la primera variable no me funcionó, pues la velocidad, pues entonces quise probar con la otra y pues justo los dos me dieron en el valor, el valor aproximado... sí el valor aproximado hacia la meta.	Operador aditivo relacional	...valor equitativo..
1	50	50		Operador aditivo simple	...más aproximado...
2	50	55			
3	52	55			
Covariación					
87,32					...se aproximará más
96,05					
99,90					...quise probar con la otra...

La Tabla 6 presenta la evidencia de uso de diversos operadores, inicialmente de corte aditivo relacional y luego aditivo simple. Igualmente, la presencia de frases que unen dos variables (V) y (T) con respecto de (D).

Tabla 7
Caso NE. Análisis de contenido situación de control 1 (intermedio)

Situación de control				Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
Intento	Y	T		Mm... pienso que un 50 y 50, ya que, ya que ¿qué? Ya que, aquí se ve (NE señala el tiempo del cuarto intento, T:65) pues que colocó pues mucho valor ¿sí? Y pues acá (NE señala la velocidad del cuarto intento, V:40) pues no tanto, pues por lo mismo, debe ser equitativa entre los dos.	Operador aditivo relacional	Equiparar
1	40	20				
2	40	30				
3	40	50				
4	40	65	Queda cerca de la meta			
5	40	70	Se pasa de la meta			
6	40	60				


En la tabla anterior se observan operadores aditivos relacionales relativos a las dos variables de forma equitativa.

Tabla 8
Caso NE. Análisis de contenido situación de control 2

Situación de control		Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
V	T	Mm... pues un 52 y un 53 (NE escribe V:52 y T:53) ¿Y con eso se llega a la meta? Pienso yo. ¿Sí? Y por qué. Por lo mismo. Son valores equitativos entonces sumándole a los dos pues voy llegando a la meta.	Operador aditivo relacional	...equitativos.
30	25			

La Tabla 8 presenta evidencia de un operador aditivo relacional que le permite al sujeto estimar llegar a la meta con valores que juzga equitativos.

Tabla 9
Caso NE. Análisis de contenido situación de control 3

Situación de control		Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
V	T	¿Y cuál crees que tendría ser el valor para llegar a la meta? El valor que debería llegar a la meta... Lo mismo, lo que siempre he dicho 50-50. Equitativos para que llegue el valor a la meta.	Operador aditivo relacional	...equitativos
40	20			
				
V	T			
80	20			

En la enunciación verbal general del caso identificado como NE, se encuentran operadores matemáticos aditivos simples y aditivos relacionales. En las oraciones se evidencia el uso de frases que ponen en relación las dos variables de (V) y (T) con respecto a (D). Este caso fue evaluado en su procedimiento en términos del uso de un control con alternancia. Las representaciones verbales que denotan operadores aditivos relacionales son pertinentes con dicho procedimiento. Sugiere el uso de una teoría en

la que el sujeto diferencia las variables V y T para producir el efecto deseado.

CASO: CH (22;00 años). Experto.

Caso CH. Análisis microgenético respecto del procedimiento en relación al control de variables: *ab* (no control, control simple de dos intentos) y covariación: *g* creciente de tres intentos.

Tabla 10
Análisis de contenido de resolución de la tarea

Procedimiento			Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
INT	V	T	CH: Listo, entonces al ver que con 5 me alcanzo a recorrer como una quinta parte dije: pues veamos con 25 debería recorrerse toda... CH: y aumentemos un poco la velocidad para que se recorra más rápido...	Operador multiplicativo relacional	...quinta parte...
1	50	5			
2	880	25			
33	80	335	Operador aditivo relacional		...aumentemos un poco...
% de acercamiento a la meta			CH: En el último me di cuenta de que con 80 se podía alcanzar la distancia, sino que le faltaba un poquito de tiempo para moverse entonces dije aumentémosle 10 segundos...	Operador aditivo simple	...faltaba... un poquito... ...aumentémosle...
8,73					
69,86					
97,80					


En la Tabla 10 se observa la presencia de diversos operadores, inicialmente de corte multiplicativo, luego aditivo relacional y por último aditivo simple. Igualmente, el uso de frases que unen las dos variables (V) y (T) y (“aumentemos un poco la velocidad para que se recorra más rápido”).

Tabla 11
Caso CH. Análisis de contenido situación de control 1

Situación de control			Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico	
Intento	Y	T	CH: Estuvo mal. Yo hubiese puesto algo entre la mitad de los dos (señala los valores de T 65 y 70) porque si dice que con 65 me queda cerca y 70 se me pasa, pues uno busca un número en la mitad para que alcance a llegar justamente donde es...	Operador proporcional relacional.	.. entre la mitad yo hubiese puesto algo entre la mitad de los dos ... uno busca un número en la mitad para que alcance	
1	40	20				
2	40	30				
3	40	50				
4	40	65				Queda cerca de la meta
5	40	70				Se pasa de la meta
6	40	60				

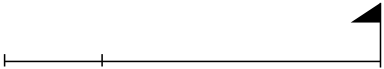
En la tabla anterior se observan operadores proporcionales relacionales relativos a dos mitades hacia atrás y hacia delante de las magnitudes en juego.

Tabla 12
Caso CH. Análisis de contenido situación de control 2

Situación de control	Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
<p>V T</p> <p>30 25</p> 	<p>CH: Entonces, este pedazo (del inicio al punto donde llegó el participante) es más o menos una cuarta parte de toda la distancia. Entonces si yo duplico la velocidad y duplico el tiempo podría recorrerla. Entonces yo pondría V 60 y T 50.</p> <p>E: Listo, ¿y llegarías a la meta?</p> <p>CH: llegaría a la meta.</p>	<p>Operador multiplicativo relacional</p>	<p>...es más o menos...</p> <p>...una cuarta parte...</p> <p>...si yo duplico la velocidad y duplico el tiempo...</p>

La Tabla 12 muestra un operador multiplicativo relacional que le permite al sujeto estimar la llegada a la meta.

Tabla 13
Caso CH. Análisis de contenido situación de control 3

Situación de control	Enunciación verbal	Análisis de contenido	Universo lingüístico
<p>V T</p> <p>40 20</p> 	<p>Solo se duplica la velocidad, entonces (piensa un momento viendo la gráfica) yo diría que llega por acá porque solo se duplica la velocidad. Entonces debería (hace una raya más allá de la mitad de toda la línea a recorrer), no de hecho debería ser como por acá (hace una raya un poco antes de la que hizo inicialmente) más o menos, si acá, porque solo se duplica la velocidad, entonces va a recorrer el doble de la distancia en el mismo tiempo, entonces debería recorrer el doble de esta distancia (señala la distancia que se recorrió con los valores de V: 40 y T:20).</p>	<p>Operador multiplicativo relacional</p>	<p>... se duplica la velocidad...</p> <p>...más o menos...</p> <p>... la mitad de toda la línea a recorrer..</p> <p>...se duplica la velocidad entonces va a recorrer el doble de la distancia en el mismo tiempo...</p>
<p>V T</p> <p>80 20</p>			

En la enunciación verbal general del caso CH, se encuentran operadores matemáticos de todas las tipologías planteadas, aditivos simples y relacionales, multiplicativos y proporcionales, según sea el caso y el problema por resolver.

En las oraciones se evidencia el uso de frases relacionales: “entonces si yo duplico la velocidad y duplico el tiempo...” Si bien el procedimiento fue evaluado como no control y control simple, las representaciones verbales de los operadores evidenciados en el análisis de contenido se muestran a un mayor nivel. Sugiere el uso de una significación representacional donde T y V se relacionan bajo diversos operadores aditivos, multi-

plicativos y proporcionales, según sea la manera más apropiada de solución.

La Tabla 14 en términos del cruce de casos, las respectivas evaluaciones procedimentales y las representaciones verbales correspondientes, resume las evidencias encontradas. Se observa que en la medida de la experticia los sujetos poseen significados representacionales cada vez más complejos y al mismo tiempo establecen relaciones entre las variables del problema. Se evidenció que cálculos más complejos del orden multiplicativo y proporcional (expertos) a diferencia del aditivo (novatos), hacen del proceso procedimental una solución más eficiente en términos de número de intentos.

Tabla 14
Cruce de casos evaluaciones procedimentales y representaciones verbales correspondientes

Nº	Casos	Intentos	Evaluación control	Evaluación covariación	Representación verbal. Cálculo máximo alcanzado
1	JJR: 11;00 (Gº 5)	6	dabe (control con alternancia, no control, control simple de dos intentos, cambio controlado)	g (creciente)	R1: cálculos aditivos sin relación entre V y T y sin referir efectos sobre D.
2	AR: 11;00 (Gº 5)	8	ac (no control, control simple de más de dos intentos)	ig (mixto, creciente)	R2: cálculos aditivos sin relación entre V y T con referencia a efectos específicos de desplazamiento en D.
3	VH: 11;00 (Gº 5)	4	ab (no control, control simple de dos intentos)	h (decreciente)	R 3 cálculos aditivos con relación entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
4	DG: 12;00 (Gº 7)	4	dd (dos controles con alternancia)	i (mixta)	R 3 cálculos aditivos con relación entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
5	ES: 15; 00 (Gº 10)	4	ab (no control, control simple de dos intentos)	g (creciente)	R 3 cálculos aditivos con relación entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
6	NV: 15;00 (Gº 8)	7	aba (no control, control simple de dos intentos, no control)	i (mixta)	R 3 cálculos aditivos con relación entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
7	JR: 16;00 (Gº 11)	4	cb (no control, control simple de dos intentos)	i (mixta)	R 3 cálculos aditivos con relación entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
8	NE: 18;00 (Gº 11)	3	d (control con alternancia)	g (creciente)	R 3 cálculos aditivos con relación entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
9	MA: 12,00 (Gº 7)	3	c (control simple de más de dos intentos)	i (mixta)	R 3 cálculos aditivos con relación entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
10	CM: 22;00 (Pregrado)	3	ab (no control, control simple de dos intentos)	g (creciente)	R4: cálculos aditivos y multiplicativos y relación diferenciada entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
11	IC: 22;00 (Pregrado)	5	ac (no control, control simple de dos intentos)	i (mixta)	R4: cálculos aditivos y multiplicativos y relación diferenciada entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.
12	CH: 22;00 (Maestría)	5	ab (no control, control simple de dos intentos)	g (creciente)	R5: cálculos aditivos, multiplicativos y de proporción directa o inversa y relación diferenciada entre V y T que produce efectos de desplazamiento en D.

La Tabla 15 revela la distribución de los sujetos respecto de la clase de representaciones utilizadas, en la que se destaca que el mayor número de participantes refiere las de tipo R3, correspondiente a significado representacional de cálculos aditivos con relación entre variables que produce efectos específicos.

Discusión

El trabajo implicó un análisis microgenético de los procedimientos seguidos por los resolutores, con base en los criterios descritos para el control de variables y la covariación, respectivamente. Con el fin de establecer los tipos de significaciones representacionales, se analizaron

los contenidos del material verbal de los sujetos a fin de inferir los operadores matemáticos empleados y las relaciones establecidas por los resolutores entre las variables del problema.

Las representaciones R1 y R2, manifestadas por cuatro participantes considerados aquí como novatos, evidencian la utilización de cálculos que si bien son elementales, conllevan buenas soluciones, pero que en todos los casos corresponden a coordinaciones cualitativas (Piaget & Inhelder (1972), en ausencia de pensamiento proporcional y seguramente en la no utilización de comparaciones multiplicativas mucho más efectivas, que se evidencia solamente en el caso del experto analizado (Touniare & Pulos, 1995). Aunque en esta investigación no se evaluó la posesión de

Tabla 15
Sujetos participantes y Clasificación de significado representacional inferido

Clase	Significado representacional	Universo verbal para relaciones y finalidad	Tipo de cálculo	Relación variables	Efecto específico	Sujetos
R1	Significado representacional de cálculos aditivos sin relación entre variables y sin referir efectos específicos.	poco; poquito; mucho; más; menos; subir; bajar; quitar; agregar; poner; adicionar; restar. Sin relación bajo la preposición (“a”) ni conjunción “y”, “poco a.. y mucho a..”. Sin locución conjuntiva de finalidad “para que..”	Aditivo	Sin relación	Sin referir efectos	AR(5°); JJR (5°)
R2	Significado representacional de cálculos aditivos sin relación entre variables con referencia a efectos específicos.	poco; poquito; mucho; más; menos; subir; bajar; quitar; agregar; poner; adicionar; restar; mayor; menor. Sin relación bajo la preposición (“a”) ni conjunción “y”, “poco a.. y mucho a..”. Con locución conjuntiva de finalidad: “para que llegue/corra/camine/desplace	Aditivo	Sin relación	Con referencia a efectos	VH (5°); DG (7°);
R3	Significado representacional de cálculos aditivos con relación entre variables que produce efectos específicos.	Todas las anteriores aditivas, mediadas por una relación bajo la preposición <i>a</i> seguida de la conjunción <i>y</i> , “poco a.. y mucho a..”. Utilización de la locución conjuntiva de finalidad: “para que llegue/corra/camine/desplace/	Aditivo	Con relación	Con referencia a efectos	ES (10°); CM (UNV); MA (7°); NV (8°); NE (11°)
R4	Significado representacional de cálculos aditivos y multiplicativos y relación diferenciada entre variables que produce efectos específicos.	todas las anteriores aditivas; duplicar; triplicar; cuadruplicar. Relación bajo la preposición <i>a</i> seguida de la conjunción <i>y</i> , “poco a.. y mucho a..”. Utilización de la locución conjuntiva de finalidad: “para que llegue/corra/camine/desplace	Aditivo y multiplicativo	Con relación diferenciada	Con referencia a efectos	JR (11°); IC (UNV);
R5	Significado representacional de cálculos aditivos, multiplicativos y de proporción directa y/o inversa y relación diferenciada entre variables que produce efectos específicos.	todas las anteriores aditivas; tercera parte; cuarta parte; quinta parte; entre la mitad de. Relación bajo la preposición <i>a</i> seguida de la conjunción <i>y</i> , “poco a.. y mucho a..”. Utilización de la locución conjuntiva de finalidad: “para que llegue/corra/camine/desplace/	Aditivo, multiplicativo y proporcional	Con relación diferenciada	Con referencia a efectos	CH (UNV)

operaciones formales por parte de los participantes, por la edad y el nivel académico, los resultados parecen ir en la perspectiva que plantean López y Alcalde (2002), la cual se traduce en que solo pocos estudiantes poseedores de tal competencia hacen cálculos de proporcionalidad.

Si uno solo de los casos estudiados de forma evidente demuestra en la solución del problema un cálculo de proporcionalidad, probablemente los demás tuvieron dificultades para resolver el problema por esta vía utilizando formas más económicas y fáciles (Gagatsis & Spanoudis, 2008). Es probable que los sujetos estudiados hayan cometido errores o que pudiendo utilizar cálculos más complejos hubiesen preferido vías más económicas, lo que está en la perspectiva de Touniare y Pulos (1995), quienes afirman que la causa de ello radica en la ignorancia de los datos fundamentales o en el uso de estrategias de

adición, en las que la composición multiplicativa hubiese podido ser más efectiva.

Futuras investigaciones con interfaces conectadas con contextos cotidianos (Hart, 1985) y menos abstractos favorecerá tanto la evaluación como el aprendizaje de esta forma de competencia matemática (Randall 2005).

Desde el punto de vista representacional bajo la perspectiva teórica de Duval (2004), todos los sujetos se enfrentaron a marcas tales como los relojes del problema, magnitudes numéricas, la barra de progreso y a su vez debieron trasladar dichas marcas a representaciones más complejas, lo que implicó una ampliación del significado inicial hasta llegar a un cálculo y una respuesta específica.

En la investigación se hicieron evaluaciones intensivas (resolución de la tarea problema y las tareas de control)

y al analizar los casos desde una perspectiva de corte transversal, se puede inferir que entre los novatos (cuatro casos y representaciones R1 y R2), los intermedios (cinco casos y representaciones R3) y los expertos (un caso y representación R5) hay diferencias representacionales. Desde esta perspectiva, como se planteó en el referente de fundamentación conceptual, los significados representacionales emergen como interrelaciones entre signos (marcas numéricas) el referente (problema por resolver) y los significados (operaciones de cálculo y relación entre variables).

Los casos analizados evidencian que el experto exhibe todas o la mayor parte de los significados representacionales. Es decir, que al utilizar un procedimiento simple la representación es aditiva y si la solución es proporcional, la representación corresponde a esa tipología, lo que devela que el desarrollo local, es decir, el pequeño trayecto micro, se caracteriza por fases de estabilidad e inestabilidad, de cambio continuo y discontinuo (Lewis, 2005). Un sujeto experto no necesariamente mantiene una conducta procedimental compleja y unas representaciones del mismo calibre, como es el caso CH, clasificado como experto.

Se puede afirmar en consecuencia que los procedimientos de los resolutores analizados bajo los criterios de control de variables y covariación reflejan variabilidad que marcan trayectorias diversas en los procedimientos de los resolutores. Este hallazgo confirma la variabilidad de trayectos y trayectorias encontrados en anterior investigación (autor 1 *et al.*, 2016). Los significados representacionales, también variables intra e intersujetos, inferidos a partir de los universos verbales en lo relativo al tipo de cálculo, la relación entre variables y los efectos específicos de las variables independientes de velocidad y tiempo sobre la distancia como variable dependiente, se caracterizaron por hacer referencia a diversos cálculos tales como la adición, multiplicación o proporcionalidad y a la variabilidad en lo relativo a las relaciones que se establecen entre las tres variables que van desde la ausencia explícita de nexos entre éstas hasta concebirlas como un sistema donde las variables se interrelacionan para producir efectos en la distancia. Parece existir una relación entre el sujeto bien sea novato, intermedio o experto, sus formas de actuación procedimentales usadas para resolver el problema y los significados representacionales que emergen al ser sometido a entrevista verbal. Se observa (Tabla 15) que de los doce casos, cinco de ellos, la mayoría relativa, refieren la utilización de la representación tipo R3, que implica cálculos aditivos con relación entre variables que produce efectos específicos.

Dicha variabilidad pareciera que obedece precisamente a la multicausalidad inherente de todo proceso de desarrollo cognitivo. Son múltiples las variables que intervienen a la hora de resolver un problema. Si bien el énfasis investigativo está en el desarrollo cognitivo, no se puede desconocer que tanto condiciones del sujeto (motivacionales, personales y socioafectivas), de la tarea (formatos), de conocimientos de dominio (físico matemático), y de contexto tanto interacciones educativas y socioculturales, tienen un peso relativo importante a la hora de resolver un problema.

Pensar la unidad de análisis resolutor-tarea-contexto, en toda su complejidad es un reto para futuras investigaciones puesto que la unidad de análisis estudiada desde el resolutor, las significaciones representacionales y la tarea (problema de proporcionalidad simple), constituye una apuesta reductora de la complejidad mencionada lo que determina una limitación en este estudio.

El desarrollo local relacional y no lineal, observado desde un corte transversal, en los sujetos participantes del estudio de diferentes edades y experticias, revelan que la expresión de lo nuevo como cambio cognitivo emergente es variable (Montes *et al.*, 2015). Desde la perspectiva de Pozo (2009), vistos todos los casos analizados en conjunto, se pueden inferir transformaciones plausibles de cambio estructural entre el novato, el intermedio y el experto. Pero a nivel de cada sujeto en particular es menester plantear que los cambios son de ajuste, sin evidencia de un reformateo de sus estructuras.

En el marco del cambio cognitivo como se afirmó, las transformaciones se dan en el paso de piezas relativamente independientes a sistemas más amplios y complejos de conocimiento organizado (Vosniadou, 2013; di Sessa, 2014). La evidencia encontrada en la exploración investigativa permite afirmar que la emergencia de lo nuevo se ancla en las concepciones previas que tienen los resolutores sobre las relaciones entre las tres variables implicadas en el problema de proporcionalidad simple de movimiento rectilíneo. Los participantes considerados novatos efectivamente fragmentan el sistema de relaciones implicadas y consideran por separado el tiempo o la velocidad sin referir efectos sobre la distancia con preferencia de soluciones aditivas, lo que comparte en buena parte los sujetos intermedios en mayor número. A diferencia (en este caso un experto) contempla los nexos entre las tres variables como un sistema complejo y dinámico en el que la variable dependiente (distancia) es producto de las operaciones interrelacionadas de las dos variables independientes (tiempo y velocidad) y manejan con versatilidad el amplio

espectro de las operaciones de cálculo utilizadas: aditivas, multiplicativas y proporcionales.

Lo anterior es coherente con los planteamientos de Vosniadou (2007; 2014), sobre las diferencias entre novatos y expertos en cuanto a mecanismos del cambio. Los novatos utilizan mecanismos de abajo a arriba, operaciones aditivas, mientras que los expertos emplean mecanismos de procesamiento arriba abajo (conocimiento de dominio) que orientan deliberadamente la puesta a prueba de hipótesis y la experimentación reflexiva que hacen plausibles explicaciones cada vez más objetivas del problema.

La distancia entre la competencia y la actuación está por poblarse de mayor evidencia sobre todo instalando el sentido de los problemas en contextos socioculturales. Todos los niños entrevistados dirimían muy bien qué ocurría para llegar a tiempo a la escuela, si se iba tarde se debía aumentar la velocidad o lo contrario. Puede ser que la actuación emerja fácilmente en los problemas de la cotidianidad y que el código científico que exige el problema sea un obstáculo epistémico para su competencia en desarrollo. Pero el experto no es el inflexible científico calculador de rígida conducta, constituye simplemente el sujeto que recurre a conquistas transitadas y caminos repetidos que fueron en su momento y a su modo, soluciones emergentes de invaluable efectividad e inteligencia, irreductibles a escalas, valores y estadios, bien sea crecientes decrecientes, como también a edades biológicas que la cultura tantas veces ha disuelto y puesto en entredicho.

Considerando posibles implicaciones educativas de esta exploración investigativa en primer lugar, es posible plantear que la evidencia lograda sobre la multiplicidad de procedimientos y diversidad de significados representacionales, seguidos por los resolutores al enfrentarse el problema que, coherente con perspectiva compleja y relacional del desarrollo, exige ampliar el espectro de valoración evaluativa de posibles rutas de los estudiantes al enfrentar problemas de proporcionalidad. Asimismo, ello exige reconocerlas para potenciar, desde la perspectiva de los estudiantes, sus posibilidades de afrontar a través de la argumentación y contraargumentación las representaciones de los cálculos y potenciarlas hacia operaciones cada vez más complejas. También implica reconocer la dimensión constructiva del error. Un análisis paso a paso de los procedimientos seguidos por los resolutores y develando las conjeturas sobre los cálculos que los soportan, permite valorar el error y potenciar el cambio cognitivo.

Los autores del presente trabajo se adhieren a la idea de que frente a este tipo de problemas se requiere mayor investigación (Obando, *et al.* 2014) para comprender con

profundidad las filiaciones, rupturas, continuidades o los saltos cualitativos entre lo aditivo, lo multiplicativo y el uso de cálculos de proporcionalidad.

Al retomar la pregunta de investigación acerca de qué tipos de representaciones verbales de operadores matemáticos involucrados en la solución del problema se pueden inferir, se consolida por la evidencia la existencia de cinco tipos de representaciones verbales, que se distribuyen entre los doce casos estudiados, entre los cuales la representación R3 es la más común, ligada a los sujetos denominados intermedios y la representación tipo R5 propia de un sujeto experto en la que es explícita la utilización de cálculos multiplicativos y proporcionales. La explicación de los procedimientos desde las representaciones dista de ser una conquista y continua como un verdadero proceso de cambio, ya que habría que estudiar la variabilidad en el desarrollo de cada representación y en cada caso, lo que exige metodológicamente medidas repetidas a lo largo de un tiempo prudencial y la utilización de tareas de *software* isomorfas en su estructura pero diferentes en su contenido. Hasta el momento se evidencian asociaciones entre tipos de procedimientos y tipos de representaciones (ver Tabla 14), lo que sin duda invita a continuar el trabajo en próximos proyectos de investigación.

En lo relativo a prospectivas de investigación, los autores plantean que es pertinente proponer nuevas investigaciones en las que los problemas involucren el mismo contenido de proporcionalidad, pero en diferentes tareas equivalentes, que permitan explorar, en el marco complejo de interacciones resolutor-tarea-contexto socioeducativo, el cambio cognitivo.

Es demandante pensar que la expresión cognitiva en un determinado momento remite a una concepción del desarrollo psicológico en general, considerado como dinámico, sometido a múltiples causas, con varias dimensiones, singular para los sujetos que viven en contextos histórico-culturales e integrales, y que todo lo anterior conduce sin pausa a la variabilidad intra e intersujeto, que revela múltiples rutas de trayectos y trayectorias, lo que obliga distanciarse críticamente de las edades biológicas, la linealidad y los estadios entre la no competencia y el éxito en el test, hoy percibido más como una forma ideológica que críticamente académica (Lerner, 2006).

Referencias

Aguilar, M., Navarro, J., López, J., & Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas. *Psicothema*,

- 14(2), 382-386. Recuperado el 25 de noviembre de 2017 de www.psicothema.com/english/psicothema.asp?id=736
- Autor 1, Autor 2, Autor 3 (2016). Referencia.
- Chi M.T. H. (2013). Two kinds and four subtypes of misconceived knowledge, ways to change it, and the learning outcomes. In: Learning and Instruction: The Framework Theory Approach In Handbook of research on conceptual change. New York: Second edition published by Routledg. doi/10.4324/9780203154472 e.
- Cortina, J. L., Visnovska, J., & Zuniga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal*, 26(1), 79-99.
- Cramer, K. and Post, T. (1993). Proportional reasoning, *The Mathematics Teacher*, 86, 404-407.
- Cramer, K. and Post, T. (1993). Proportional reasoning, *The Mathematics Teacher*, 86, 404-407.
- di Sessa A. (2013). A Bird's-Eye View of the "Pieces" vs. "Coherence" Controversy (from the "Pieces" Side of the Fence). In: Learning and Instruction: The Framework Theory Approach In Handbook of research on conceptual change. New York: Second edition published by Routledg. doi/10.4324/9780203154472 e.
- di Sessa A. (2014). A history of conceptual change research: treads and fault lines. Californai digital library. Universiti of California. DOI: 101017/CBO978113951
- Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía. Cali, Colombia: Grupo de Educación Matemática, Peter Lang.
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In: J. Hiebert & M. Behr (Eds), Concepts and Operations in the Middle. Grado 2 (pp. 198-219). Reston, Virginia. USA. National Council of Teachers of Mathematics.
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In: J. Hiebert & M. Behr Eds, Concepts and Operations in the Middle. Grado 2 (pp. 198-219). Reston, Virginia. USA. National Council of Teachers of Mathematics.
- Hoffer, A. (1998). Ratios and proportional thinking. In T. Post (Ed.), Teaching Mathematics in Grades K-8: Researched Based Methods. (pp. 285-313). Allyn & Bacon. Boston, MA.
- Kuhn T.S. (2000). La estructura de las revoluciones científicas. Santafé de Bogotá, Fondo de Cultura Económica.
- Lawton, C. A. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 460-466. Recuperado Julio de 2018 <https://www.jstor.org/publisher/nctm?refreqid=excelsior%3A2027108c06edbf87bd0d425653d2fd6c>
- Lerner, R. (2006). Theoretical Models of Human Developmental. Handbook of Child Psychology. Sixth edition. Volume One: Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Lewis, M. D. (2000). The promise of Dynamic Systems Approaches for an integrated Account of Human Developmental. *Chil Developmental*, 71(1), 36-43. doi: 10.1111/1467-8624.00116
- Lewis, M. D. (2005). Self-organizing individual differences in brain development. *Developmental Review*, 25, 252-277.
- López, F. (2002). Análisis de contenido como método de investigación. En Estadística y Metodología de la Investigación. XXI, *Revista de Educación*, 4, 167-179. Universidad de <https://www.scribd.com/.../Analisis-de-Contenido-Como-Metodo-de-Investigacion>
- Lotka, A. J. (1925). Elements of physical biology. Baltimore: Williams & Wilkins Co.
- Maestría de Niñez, Familia y Desarrollo en Contextos. (2017). Facultad de Psicología de la Pontificia Universidad Javeriana.
- Modestou, Iliada Elia, Athanasios Gagatsis & Giorgos Spanoudis (2008) Behind the scenes of pseudo-proportionality, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39:3, 313-324, DOI: 10.1080/00207390701691541
- Montes, J.; van Dijk, M.; Puche, N.; van Geer, P. (2015). Trajectories of scientific reasoning: a microgenetic view of children's inquiry. Cali: Pontificia Universidad Javeriana. Inédito.
- Obando, G., Vasco, C. & Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. (Teaching and learning of reason, proportion and proportionality: a state of art). Recuperado el 26 de noviembre de 2017 de: www.scielo.org.mx/pdf/relime/v17n1/v17n1a4.pdf
- Obando, G., Vasco, C. & Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. Recuperado el 26 de noviembre de 2017 de www.scielo.org.mx/pdf/relime/v17n1/v17n1a4.pdf doi:
- Ojose, B. (2015). Proportional Reasoning and Related Concepts: Analysis of Gaps and Understandings of Middle Grade Students. *Universal Journal of Educational Research*, 3(2), 104-112. Recuperado Agosto de 2018 de <https://eric.ed.gov/?id=EJ1056108>
- Pozo J. I., & Gómez Crespo M. A. (2009). Aprender a enseñar ciencias. Barcelona: Ediciones Morata.
- Pozo J. I., & Gómez Crespo M. A. (2009). Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico: más allá del cambio conceptual. En Aprender a enseñar ciencias. Barcelona: Ediciones Morata.

- Puche-Navarro, R. (2008). *Érase una vez el desarrollo*. En Larreamendy-Joerns, J. Editor, Puche-Navarro, R. Editora, & Restrepo, A. Editora, Claves para pensar el cambio: Ensayos sobre psicología del desarrollo. (pp. 30- 68). Colombia: Universidad de los Andes, Centro de Estudios Socioculturales e Internacionales.
- Randall C, Carmel, CA (2005). Big ideas and understandings as a foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership*, 7(3), 9-24. Recuperado Julio 2008 https://scholar.google.es/scholar?hl=es&cas_sdt=0%2C5&q=Big+Ideas+and+Understandings+as+the+Foundation+for+Elementary+and+Middle+School+Mathematics&btnG=
- Rapetti, M. V. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Suma*, 44, 65-70. Recuperado noviembre 20018, de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/44/065-070.pdf>
- reasoning: a microgenetic view of children's inquiry. Pontificia Universidad Javeriana. Sede Cali. Inédito.
- Sanz, A. Pozo, J., Pérez, M., & Gómez, M. (1996). El razonamiento proporcional en expertos y novatos: el efecto del contenido. (Proportional reasoning in experts and novices: the effect of the content). Recuperado el 25 de noviembre del 2017 de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2358286.pdf>
- Sanz, A. Pozo, J., Pérez, M., & Gómez, M. (1996). El razonamiento proporcional en expertos y novatos: el efecto del contenido. Recuperado el 25 de noviembre del 2017 de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2358286.pdf>
- Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4), 401-412.
- Tourniaire, F. and Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics* 16, 18 1-204.
- Tourniaire, F. and Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics* 16, 18 1-204.
- Vasco, C. E. & Henao, G. C. (2008). Elementos y Modelos del Desarrollo: Una revisión del Concepto. En Larreamendy-Joerns, J. Editor, Puche-Navarro, R. Editora, & Restrepo, A. Editora, Claves para pensar el cambio: Ensayos sobre psicología del desarrollo. (p./pp 1-27). Colombia: Universidad de los Andes, Centro de Estudios Socioculturales e Internacionales.
- Villagrán, M. A., Guzmán, J. I. N., Pavón, J. M. L., & Cuevas, C. A. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, 14(2), 382-386. Recuperado julio de 2017 de <https://www.redalyc.org/pdf/727/72714230.pdf>
- Vosniadou S. (2007, revisado 2014). Conceptual Change and Education. In Human Development DOI: 10.1159/000097684
- Vosniadou, S. (2013). Conceptual Change. In: Learning and Instruction: The Framework Theory Approach. In: Handbook of research on conceptual change. New York: Second edition published by Routledge. doi/10.4324/9780203154472
- Wahyuningrum, A. S., & Suryadi, D. (2017, September). Epistemological Obstacles on the Topic of Ratio and Proportion among Junior High School Students. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 895, No. 1, p. 012066). IOP Publishing.