

SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO PARA LA REGULACION DE PRESION DEL CABEZAL DE CLORO DE LAS CAMARAS DE CELDAS

Ruth Cañizalez
Universidad Privada Dr. Rafael
Belloso Chacin
ruthcanizalez@gmail.com

Sergio De Pool
Universidad Privada Dr. Rafael
Belloso Chacin
sergiodepool@gmail.com

Ricardo Fabelo
Universidad Privada Dr. Rafael
Belloso Chacin
rfabelo@urbe.edu.ve

(Tipo de Artículo: **Investigación**. Recibido el 16/01/2014. Aprobado el 10/05/2014)

RESUMEN

El control es esencial en los procesos industriales, donde variables físicas como presión, temperatura, humedad y flujo entre otras, deben ser parametrizadas de acuerdo a las condiciones del proceso con la finalidad de mejorarlos y optimizarlos. La mayoría de los procesos industriales son multivariantes y se requiere del análisis del sistema dinámico, manipulando sus entradas de manera que se comporte de acuerdo a las necesidades que el ambiente y el sistema experimenten en cada intervalo de tiempo. Luego el propósito de esta investigación estuvo dirigido al diseño de un sistema que regulara la presión del cabezal de cloro en las cámaras de celdas (Planta de Cloro Soda en Pequiven) utilizando como técnica el control óptimo. La metodología utilizada según la investigación fue de tipo descriptivo y aplicada, De diseño no experimental, de Campo y Transaccional descriptiva. La unidad de análisis se enfocó en la generación de cloro por medio de la regulación de presión del cabezal de cloro de 30 "de FRP de la cámara de celdas, basada en la recolección de datos finitos en tiempo real directos del proceso. Las técnicas de recolección de datos fueron cualitativas y cuantitativas en función de los diferentes programas utilizados para el desarrollo de los modelos matemáticos y los parámetros para el control óptimo. El resultado final es la demostración de la efectividad del control óptimo dentro de la investigación propuesta.

Palabras clave

Automatización, control óptimo, control no lineal.

OPTIMAL CONTROL SYSTEM FOR REGULATING THE HEAD PRESSURE OF CHLORINE IN THE CHAMBERS OF CELLS

ABSTRACT

Control is crucial in industrial processes where physical variables such as pressure, temperature, humidity and flow, among others, must be parameterized according to process conditions in order to improve and optimize them. Most industrial processes are multivariable processes and they require the analysis of the dynamic system by manipulating its inputs in order to meet temperature and system requirements at each time interval. The purpose of this research is focused on the design of a system for regulating the head pressure of chlorine in the chambers of cells (Chlorine-Alkali Plant in Pequiven) using as technique the optimal control. The methodology used for this research was descriptive-applied, non-experimental, cross-sectional, on-field and descriptive design. The analysis unit is focused on producing chlorine by regulating the pressure of chlorine head 30" FRP chamber of cells, based on collecting finite data in real time directly from the process. Quantitative and qualitative data collection techniques were based on the different programs used for developing mathematical models and parameters for optimal control. The result is the effective demonstration of optimal control within the proposed research

Keywords

Automation, Optimal control, Nonlinear control.

SYSTÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL POUR LE RÉGLAGE DE LA PRESSION EN TÊTE DU CHLORE DES CHAMBRES DE CELLULES

Résumé. Le contrôle est essentiel dans les processus industriels où des variables physiques comme pression, température, humidité et flux, entre autres, doivent être paramétrés d'après les conditions du processus pour les améliorer et les optimiser. La majorité des processus industriels sont multivariable et il est nécessaire de l'analyse du système dynamique, en manipulant ses entrées d'une certaine manière pour qu'il se comporte d'après les nécessités que l'environnement et le système affrontent pendant chaque intervalle de temps. Le but de cette recherche est de concevoir un système capable de régler la pression en tête du chlore des chambres de cellules (Usine de chlore soda dans Pequiven) en utilisant comme technique le contrôle optimal. La méthodologie utilise a été de type descriptive et appliqué, avec des conceptions non-expérimentaux, du champ et transversale descriptive. L'unité d'analyse est focalisée sur la production du chlore au moyen du réglage de la pression en tête du chlore de 30" de FRP de la chambre de cellules, d'après la collecte des données finies directs du processus. Les techniques de collecte ont été de type qualitative et quantitative d'après le différents logiciels utilisés pour les développements des modèles mathématiques et les paramètres pour le contrôle optimal. Le résultat final est la démonstration effective du contrôle optimale dans la recherche proposé.

Mots-clés. Automatisation, Contrôle optimal, Contrôle non-linéale.

1. INTRODUCCIÓN

En la necesidad de optimizar los procesos industriales en todas las áreas del conocimiento, las matemáticas aplicadas han sido factor determinante en su rendimiento y efectividad, partiendo del desarrollo de modelos matemáticos y variables. Algunos de tales problemas de optimización son tan complejos que no se ha podido dar respuesta desde las matemáticas exactas y por esto se han desarrollado técnicas alternativas de estudio como el control automático, clásico, moderno, discreto e inteligente que a pesar de no encontrar las soluciones globales, algunas veces superan lo logrado matemáticamente.

La Ingeniería de Control parte de la definición de la palabra "control" que implica "actuación" y refleja el esfuerzo humano para intervenir en el medio que le rodea para garantizar su supervivencia y una permanente mejora en la calidad de vida. Muchos de los problemas de control se analizan a través de un modelo matemático que describe el sistema físico. Una de las primeras teorías de control desarrollada fue el concepto de Feedback (o retroalimentación), estrategia relacionada con la noción de control en tiempo real, muy importante en los procesos industriales.

Hoy en día, los procesos en Feedback según S. Bennet (1979) son ubicuos, en los análisis industriales el clásico principio de causa-efecto ya no se aplica como una ley estática, sino que se observa desde una perspectiva dinámica. Así, que se debe hablar más bien del principio causa-efecto-causa que busca minimizar la diferencia entre el comportamiento deseado para el sistema y el comportamiento presentado por el mismo según Seong (2001). En este sentido, el problema del control puede ser analizado como un problema de optimizar un criterio de desempeño o función objetivo que describe el comportamiento global de un sistema. A partir de este concepto se derivan propuestas como la realimentación de variables de estado y controladores PID aplicados en sistemas físicos lineales dado que en ellos es posible realizar un análisis en el dominio de la frecuencia. Estos controladores generalmente requieren que los modelos matemáticos sean linealizados y funcionan solamente en puntos de operación particulares de acuerdo a lo expuesto por Giraldo (1997), Astromg, K(1997), Kailath, T(1980). Sin embargo, aunque es posible controlar en varios puntos de operación, la anterior dificultad obliga la necesidad de controles no-lineales. La teoría de control óptimo ofrece solución a las dificultades descritas anteriormente, integrando la teoría de cálculo de variación y el principio de optimalidad asociado a la ecuación de Bellman, convirtiéndose así en una herramienta útil para optimizar índices de desempeño cuando las restricciones del modelo involucran ecuaciones diferenciales lineales y/o no lineales o ecuaciones de diferencia para sistemas discretos según expresa Sage, A (1977), Molina, A. (2004).

En el presente artículo se analiza algunos aspectos de la teoría de control que incluyen consideraciones sobre tipos, técnicas y evolución y la eficiencia y diversidad de la teoría del control óptimo en los procesos industriales en especial sistema de control óptimo para la regulación de presión del cabezal de cloro de las cámaras de celdas.

2. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

2.1. Fundamentos teóricos

2.1.1. Teoría de control, técnicas y evoluciones

La Teoría de control desde sus orígenes, se fundamenta en las investigaciones realizadas por Ch. Huygens y R. Hooke sobre la oscilación del péndulo a finales del siglo XVII, siendo el propósito determinar la estabilidad y precisión del tiempo y de las variables que garantizaban el movimiento continuo del péndulo. Estos trabajos fueron después adaptados a la regulación de la velocidad de los molinos de viento. Es entonces, James Watt quien adapta este principio a la máquina de vapor, dando así un enorme impulso a la revolución industrial.

Ya en 1868 el físico escocés J.C. Maxwell realiza el primer análisis teórico convincente sobre la estabilidad de este regulador, explicando algunos de los comportamientos un tanto erráticos que se observaban en las máquinas de entonces y propuso diversos mecanismos de control.

Para la década de los 30', la Ingeniería de Control comienza a formar parte importante de la Ingeniería de Sistemas Complejos. Paralelamente, se produce un importante avance en todo lo relacionado con el control automático y las técnicas de diseño y análisis. Las aplicaciones eran numerosas: amplificadores en sistemas telefónicos, telefónicos, el sistema de distribución de plantas eléctricas, la estabilización de aviones, los mecanismos eléctricos para la industria papelera, procesamiento de material sintético de las industrias químicas, del petróleo y del acero, etc.

De este modo fueron surgiendo gradualmente nuevos y sólidos conceptos y para finales de esa década, se contaba ya con dos métodos emergentes, pero diferenciados: un primer método basado en la utilización de ecuaciones diferenciales y otro de carácter probabilístico, basado en el análisis de la relación entre la amplitud y fase de las señales de entrada con respecto a la señal de salida.

Luego a partir de 1960, comienza una concepción: los modelos utilizados hasta ese momento eran inadecuados para representar la complejidad del mundo real, ya que los mismos con frecuencia presentaban un comportamiento no lineal y no determinista, nace entonces la Teoría de Control Clásico. Investigaciones importantes como las contribuciones de R. Bellman (programación dinámica), R. Kalman (1974) con las teorías de filtrado y análisis algebraico de problemas de

su procesamiento. Se obtuvieron dos conjuntos de datos, los cuales fueron utilizados uno para la estimación del modelo y el otro para la validación del mismo.

La definición de la estructura del modelo, se realiza estableciendo los órdenes de los polinomios que lo componen.

En este trabajo se tomó como punto de partida el conocimiento del proceso y el análisis del comportamiento de la salida ante cambios en las entradas para definir el orden del proceso, al tiempo que mediante el comando `ident` en el matlab se tiene la posibilidad de ir ensayando diferentes estructuras hasta encontrar la adecuada.

Considerando la teoría sobre diseño de experimento, se realizaron diferentes pruebas controladas a lazo abierto del proceso. Se tomó en cuenta para este estudio dos (2) escenarios de operación del control de presión del colector del cabezal de cloro, los cuales consintieron en lo siguiente:

1. Se mantuvo la carga fija, donde vario la presión y la apertura de la válvula, de manera tal, se logró observar como se ve afectada la presión del cloro en el cabezal, cuando la carga es estable.
2. Se mantuvo fija la apertura de la válvula, se realizó cambios en la carga y por ende vario la presión, logrando determinar cómo se ve afectada la presión del cloro en el cabezal, cuando la carga varia.

Estas pruebas se realizaron bajo supervisión directa del supervisor panelista del área de cloro; en relación a cuánto sería el escalón para aumentar o disminuir la carga. Adicionalmente se efectuaron dichas pruebas cuando se observó la mayor estabilidad del sistema, aguas arriba y aguas abajo. Esto para garantizar la menor influencia de otras posibles perturbaciones.

Para la simulación del modelo, la aplicación de esta metodología implica prueba y error, donde cada prueba está caracterizada por los criterios y reglas prácticas que forman parte de la teoría de identificación de modelos por regresión lineal. Dicha metodología es aplicada interactivamente, mediante comandos en Matlab, hasta conseguir el mejor resultado. En este trabajo se llama el mejor resultado; a aquel modelo que reproduce con buena exactitud las señales de salida usadas para propósitos de estimación y al mismo tiempo logra reproducir con buena exactitud las salidas de un grupo de datos diferentes a los utilizados para estimación, partiendo de las entradas.

3. RESULTADOS OBTENIDOS

Dado que este proceso iterativo es muy extenso, solo se mostrará el desarrollo de las siguientes actividades para el mejor resultado obtenido:

Para obtener el modelo matemático del primer escenario a estudiar, se tomó 150 puntos desde el 3050 hasta 3200, donde se observa la manipulación de la apertura

de la válvula (Variable de entrada) con un cambio tipo rampa en forma de cierre, ocasionando que la presión (Variable de salida) aumente; procurando que la carga se mantuviese estable, de forma tal que no se presentase otras perturbaciones en el sistema. En la figura 4 se puede observar dicho comportamiento.

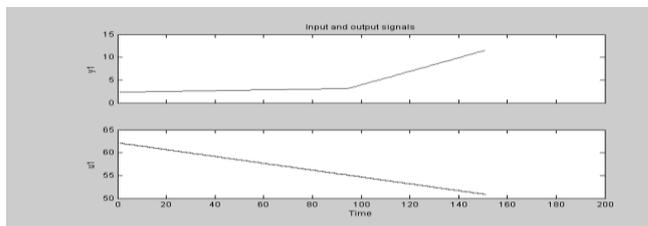


Fig. 4. Apertura de la Válvula (u1) y Presión (y1)

Demostrando entonces que la variable de entrada es persistentemente excitante, puesto que los cambios en la variable de salida son notables ante los cambios entrantes, cumpliendo de esta manera con lo expuesto en la teoría de diseño de experimento.

Luego de seleccionar la data más representativa del proceso, se procedió a modelar, mediante las estructuras de modelos definidas en el marco teórico. Se obtuvieron diferentes modelos matemáticos, de forma paramétrica.

De los modelos a identificar, se probaron el ARX, ARMAX, OE y BJ. En la figura 5, se presenta el porcentaje de ajuste de los distintos modelos probados. En él se observa que para el modelo ARX el porcentaje fue de 79,63, para el ARMAX fue de 78,73, para el OE y el BJ fue de 91,84, según los porcentajes de ajuste dados, el modelo OE se ajustó mejor y el ARMAX fue el de más bajo ajuste, sin embargo su porcentaje de ajuste está por encima de 70%. Se procede a comparar los cálculos residuales, para así descartar modelos paramétricos.

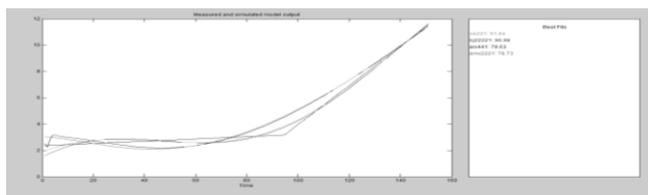


Fig. 5. Comparación del ajuste de los modelos (1 escenario)

Respecto al análisis de los residuales; se observa que los modelos ARMAX, ARX y BJ están cercanos a 0, estando así dentro de los límites de confianza establecidos para el cálculo (99% por defecto), indicando que estadísticamente el proceso de estimación de los modelos está bien logrado y puede ser tomado como una buena aproximación del sistema que se está analizando, sin embargo se descarta el modelo OE, por estar fuera de los rangos de confianza. En la figura 6 se muestra el resultado obtenido.

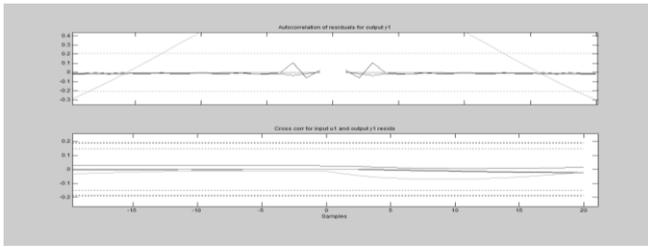


Fig. 6. Análisis residual de los modelos.

Ahora se evaluará la estabilidad de cada uno de los modelos obtenidos, para lo cual se analiza la ubicación de los polos y ceros de las funciones de transferencia de los mismos.

Se observa la ubicación de los polos y ceros de todos los modelos obtenidos. El modelo OE tiene polos fuera del círculo unitario, haciendo de este un modelo inestable, como se muestra en la figura 7A. El modelo BJ tiene los polos ubicados cerca del contorno del círculo unitario, entonces, para el efecto de estudio y estrategia de control no es recomendable. En la figura 7B se muestra que el modelo ARX tiene mayor número de polos y ceros, teniendo un cero fuera del círculo unitario, el cual implica que el modelo tiene respuesta inversa, lo cual no se refleja en la data real. El modelo ARMAX tiene polos y ceros en el límite del círculo unitario, resultando ser el modelo más estable de todos.

De esta manera se cumple con la premisa establecida para la obtención de un buen modelo, ya que al estar los polos dentro del círculo unitario se asegura la estabilidad del sistema ante posibles perturbaciones

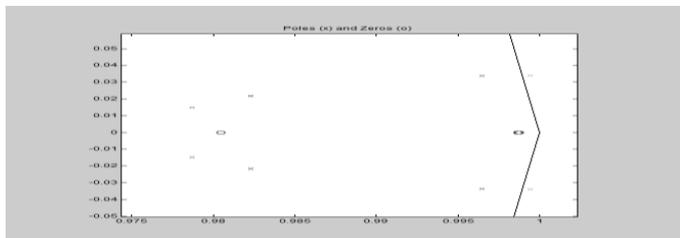


Fig. 7A. Ubicación de polos y ceros.

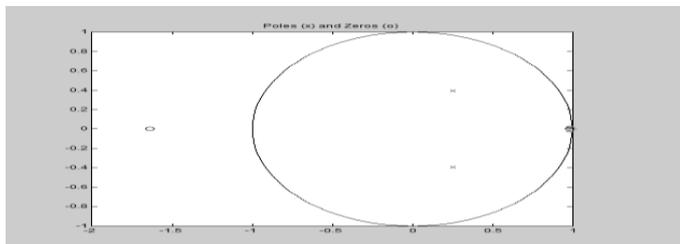


Fig. 7B. Ubicación de Polos y Ceros en el círculo unitario.

En la Tabla 1, se hace un análisis comparativo de los modelos obtenidos, donde se puede observar los modelos que presentan mayor porcentaje de ajuste y si son o no críticamente estables.

Tabla 1. Análisis comparativo de modelos obtenidos

| MÉTODO | PARAMETROS UTILIZADOS | AJUSTE | ESTABILIDAD | RESIDUOS |
|-------------------------|-----------------------|--------|-------------|----------|
| ARX (na; nb; nk) | 4,4;1 | 79,63 | SI | SI |
| ARMAX (na; nb; nc; nk) | 2,2;2;1 | 78,73 | SI | SI |
| OE (nb; nf; nk) | 2,2;1 | 91,84 | NO | NO |
| BJ (nb; nc; nd; nf; nk) | 2,2;2;2;1 | 91,84 | NO | SI |

Por lo anteriormente expuesto, el modelo a utilizar para este estudio será el tipo ARMAX, el cual se presenta a continuación su función de transferencia en el plano discreto.

$$Gp(z) = \frac{-1.099z + 1.097}{z^2 - 1.957z + 0.958} \quad (1)$$

Para obtener el modelo matemático del segundo escenario a estudiar, se toma 391 puntos, los cuales van del 820 hasta 1210. Se manipulo la carga (Entrada), en este caso incrementando, por ende varia la presión (Salida) aumentando; mientras la válvula se mantuvo estable. En la figura 8 se puede observar dicho comportamiento.

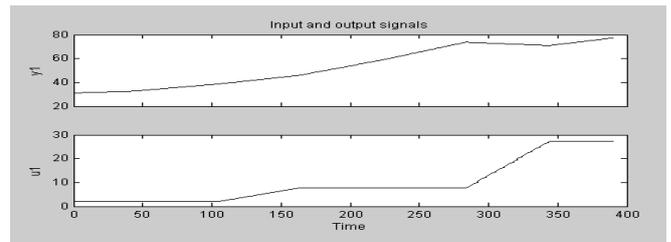


Fig. 8. Carga (u1) y Presión (y1)

Luego de seleccionar la data más representativa del proceso, se procedió a modelar dicho valores mediante las estructuras de modelos definidas en el marco teórico. Se obtuvieron diferentes modelos matemáticos presentando en la Fig. 9 el porcentaje de ajuste de los distintos modelos probados. Se observa que para el modelo ARX el porcentaje fue de 71,63, para el ARMAX fue de 67,43, para el OE y BJ fue de 57,19, según los porcentajes de ajuste dados, el modelo ARX se ajustó mejor y el OE fue el de más bajo ajuste. Se procede a comparar los cálculos residuales, para así descartar modelos paramétricos.

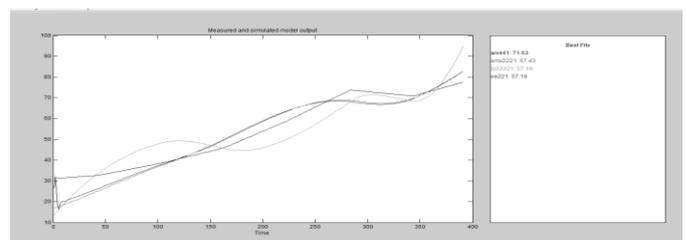


Fig. 9. Comparación del ajuste de los modelos (2 Escenario)

Respecto al análisis de los residuales; se observa que los modelos ARMAX, ARX y BJ están cercanos a 0, estando así dentro de los límites de confianza

establecidos para el cálculo (99% por defecto), indicando que estadísticamente el proceso de estimación de los modelos está bien logrado y puede ser tomado como una buena aproximación del sistema que se está analizando, sin embargo se descarta el modelo OE, por estar fuera de los rangos de confianza. En la Fig. 10, se muestra el resultado obtenido.

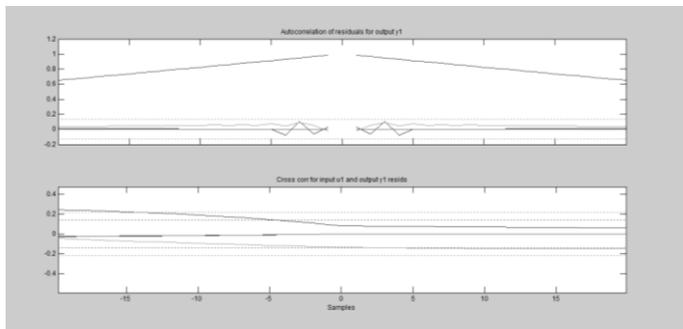


Fig. 10. Análisis residual de los modelos.

Ahora se evaluará la estabilidad de cada uno de los modelos obtenidos, para lo cual se analiza la ubicación de los polos y ceros de las funciones de transferencia de los mismos.

Se observa la ubicación de los polos y ceros de los todos los modelos obtenidos, como se observa en la figura 11A. Los modelos OE, BJ tienen los polos ubicados dentro del círculo unitario y los 0 fuera de este, lo cual garantiza la estabilidad del sistema. El modelo ARX presenta los polos dentro del círculo unitario, pero muy lejano del contorno y los ceros fuera de este. En la figura 11B se muestra que el modelo ARMAX tiene mayor número de polos fuera del círculo unitario y los ceros dentro del círculo.

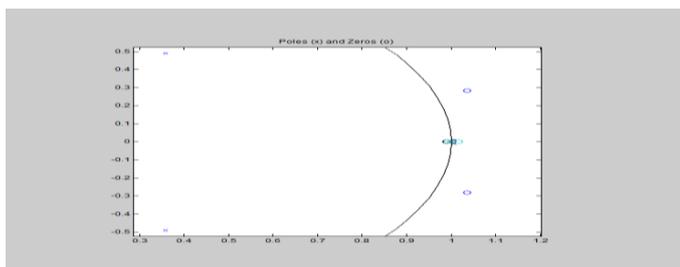


Fig. 11A. Ubicación de Polos y Ceros en el círculo unitario

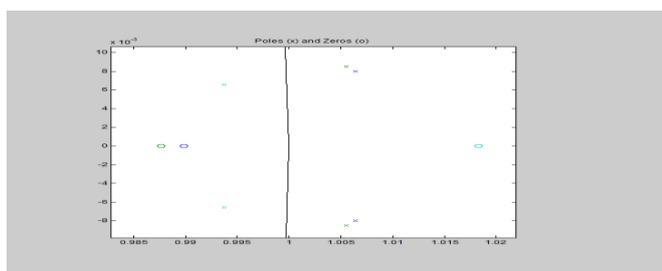


Fig. 11B. Ubicación de Polos y Ceros en el círculo unitario

En el Tabla 2, se hace un análisis comparativo de los modelos obtenidos, donde se puede observar los modelos que presentan mayor porcentaje de ajuste y si son o no críticamente estables.

Tabla 2. Análisis comparativo de los modelos obtenidos.

| MÉTODO | PARAMETROS UTILIZADOS | AJUSTE | ESTABILIDAD | RESIDUOS |
|----------------------------|-----------------------|--------|-------------|----------|
| ARX (na; nb; nk) | 4;4;1 | 71,63 | SI | SI |
| ARMAX (na; nb; nc; nk) | 2;2;2;1 | 67,43 | NO | SI |
| OE (nb; nf; nk) | 2;2;1 | 57,19 | NO | NO |
| BJ (nb; nc; nd; nf; nk) | 2;2;2;2;1 | 57,19 | SI | SI |

Por lo anteriormente expuesto, el modelo a utilizar para este estudio será el tipo BJ ya que a pesar de tener el menor porcentaje de ajuste; tiene los polos más cerca del contorno del círculo unitario, se presenta a continuación su función de transferencia en el plano discreto.

$$Gd(z) = \frac{-0.07309z + 0.07443}{z^2 - 1.988z + 0.9876} \quad (2)$$

De esta manera se tiene que los modelos estimados, son buenas aproximaciones del sistema real, puesto que cumplen con las premisas establecidas en la teoría de estimación de modelos matemáticos. Solo resta validarlos con los otros conjuntos de datos, seleccionados para ello.

Para la evaluación del modelo con una entrada distinta a la utilizada para obtener el mismo, se procede con la herramienta SIMULINK para realizar dichas pruebas.

Modelo simulado para el escenario # 1

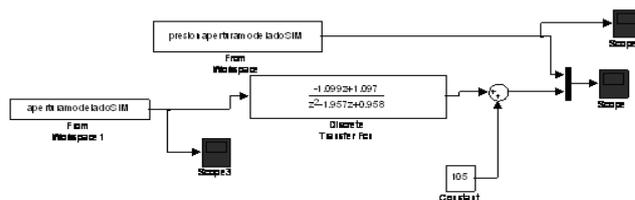


Fig. 12. Modelo obtenido evaluado con la data de real.

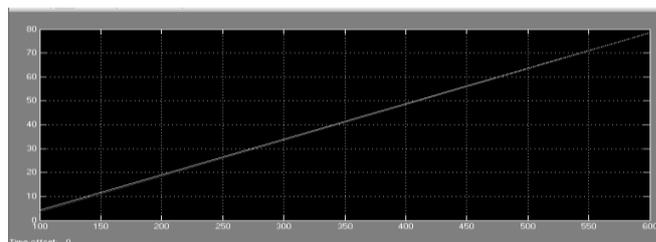


Fig. 13. Resultado de la salida real vs salida del modelo.

Modelo simulado para el escenario # 2

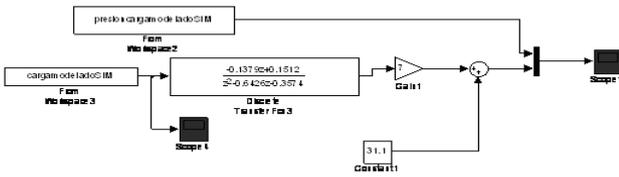


Fig. 14. Modelo obtenido evaluado con la data de real.

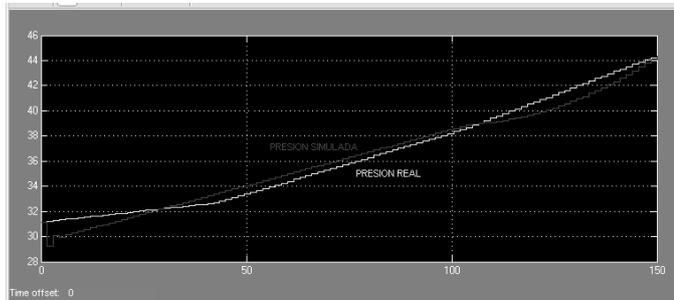
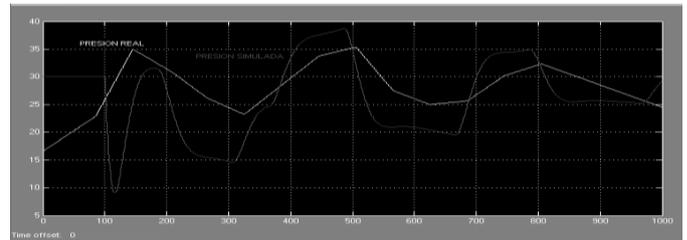


Fig. 15. Resultado de salida real vs salida del modelo. (Segundo escenario).

Se puede observar que los modelos al someterse a una entrada real, generan una salida muy similar a la real, tal como se esperaba ya que se evaluó con la misma data utilizada para la obtención del modelo, por tal motivo se procede a realizar una segunda evaluación con una entrada distinta pero seleccionada en condiciones similares a la utilizada para la obtención del modelo.

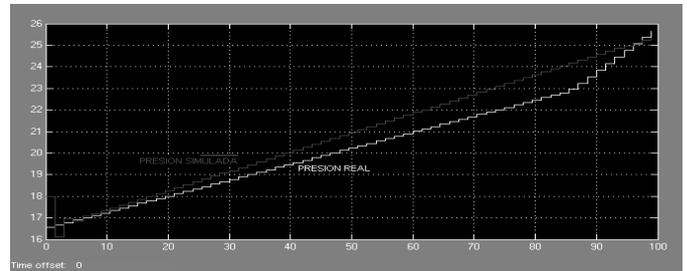


Fig. 17. Salida real vs salida del modelo. (Ambos escenarios).

Para corroborar la eficiencia de los modelos obtenidos, se procedió a simular con toda la data real, la suma de las dos presiones obtenidas en los modelos paramétricos, dando como resultado lo siguiente:

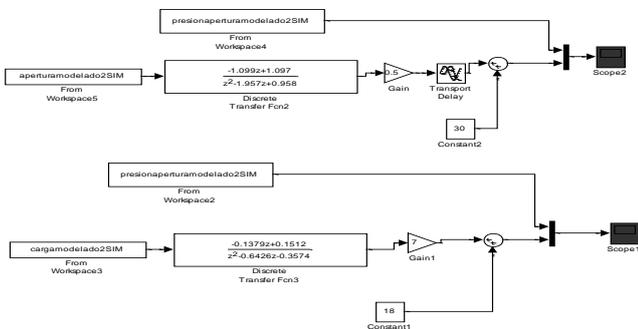


Fig. 16. Modelo obtenido evaluado con la data de real.

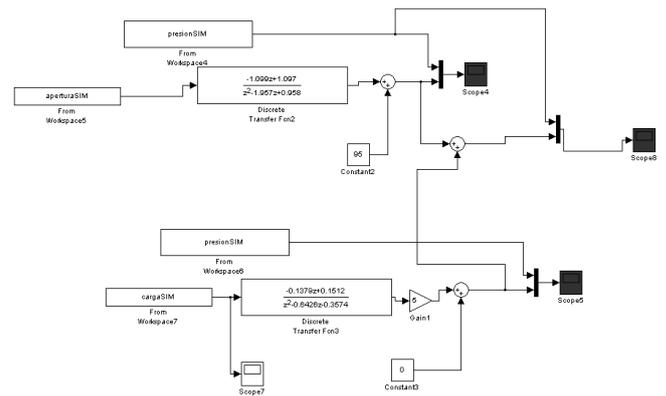


Fig. 18 Modelo para la suma de presión como resultado de los dos escenarios.

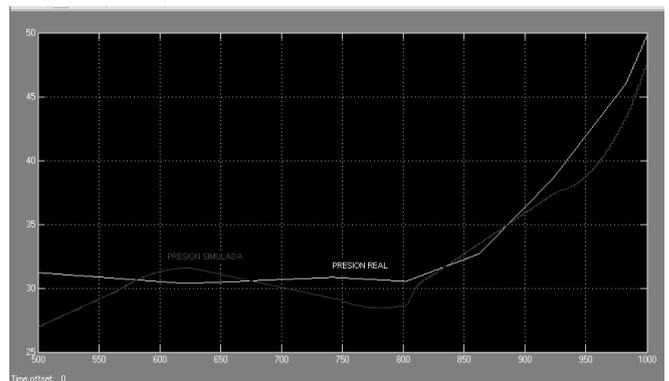


Fig. 19. Resultado del modelo sumando las presiones.

4. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en la investigación realizada, dirigida a desarrollar un sistema de control óptimo para la regulación de presión del cabezal de cloro de las cámaras de celdas.

Dicho trabajo, se ha llegado hasta la identificación de los modelos paramétricos, para posteriormente aplicarlos en el desarrollo del esquema del PI Optimo. Lo cual permite concluir lo siguiente:

Se presentó la identificación de un modelo linealizado de un sistema de presión de gas en celda de generación de cloro, en este modelo se representa la dinámica de la presión sobre cambios en la válvula de control (variable manipulada) y con respecto al cambio de carga en el sistema (variable de perturbación). El modelo identificado para el primer escenario estudio fue el de tipo ARMAX siendo estable y su mejor ajuste se obtuvo con un % de 78,73, para el segundo escenario estudio fue mediante el modelo paramétrico del tipo Box Jenkins con un % de 57,19.

El modelo matemático seleccionado fue simulado y evaluado con data real del proceso, mediante la herramienta SIMULINK, en esta prueba se obtuvo que el modelo se respondía a distintas entradas del proceso de forma similar a los datos reales de la salida.

RECOMENDACIONES

El modelo identificado, puede ser usado para realizar pruebas de cualquier tipo de estrategia de control, por lo tanto, se recomienda utilizar el modelo para probar estrategias de control clásico como moderno.

AGRADECIMIENTOS

Los autores reconocen y agradecen las contribuciones de E. Salas (Venezuela), M. Omaña (Venezuela) y A. Otálora (Venezuela) en las ayudas en la fijación de los criterios lingüísticos y en la elaboración de ejemplos de referencias.

REFERENCIAS

- [1] H. Aboukheir, "Sistemas de Control II", Revista de Estudios Interdisciplinarios en Ciencias Sociales Universidad Rafael Belloso Chacín, vol. 8, pp. 548-549, Marzo 2006.
- [2] F. Arias, "El Proyecto de Investigación: introducción a la metodología científica". 4a. ed. Caracas: Editorial Episteme, 2004.
- [3] B. R. Bannister, D. G. Whitehead, "Instrumentación: Transductores e interfaz". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
- [4] R. Boylestad, "Electrónica: Teoría de Circuitos", sexta edición. México: Prentice Hall, 1997.
- [5] R. Dorf, "Sistemas de control modernos". México: Pearson Educación, 2010.
- [6] N. Chávez, "Introducción a la investigación educativa", Maracaibo, Ars Grafica, S.A., 1996, pp. 193-214.
- [7] A. B. Corripio, C. A. Smith, "Control automático de procesos". 1ra. Ed. México: Limusa Noriega Editores, 2004.
- [8] A. Creus, "Instrumentación Industrial". Sexta Edición. España: Editorial Marcombo, 2011.
- [9] D. M. Etter, "Solución de problemas de Ingeniería con Matlab". México: Prentice-Hall, 1996.
- [10] B. Kuo, "Sistemas Automáticos de Control". México: Compañía editorial continental, S.A., 1996.
- [11] K. Ogata, "Ingeniería de control moderna". España: Prentice-Hall, Hispanoamericana S.A., 2003.
- [12] K. Ogata, "Sistema de control en tiempo discreto". México: Pearson Educación, 1996.
- [13] C. Sabino, "El Proceso de Investigación", Ed. Panapo, Caracas, 2002.
- [14] W. H. Fleming, "Deterministic and Stochastic Optimal Control". Springer-Verlag, New York, 1975.
- [15] G. A. Bliss, "Calculus of Variations, Mathematical Association of America". Carus Mathematics Monographs, 1925.
- [16] J. R. Dorroh, y G. Ferreyra, "Optimal Advertising in Growing-Stabilizing Markets Optimal Control Applications and Methods", 1993.