

Obtención del espectro de energía de un haz de electrones a partir del método de mínimos cuadrados

Obtaining of Energy Spectrum of an Electron Beam from the Least-Square Method

Jorge Homero Wilches Visbal¹
Danny Giancarlo Apaza Veliz²

¹Universidad del Magdalena, Colombia. Email: jwilches@unimagdalena.edu.co

²Universidad de São Paulo, Brazil. Email: dveliz@usp.br

 OPEN ACCESS



Copyright:

©2022. La revista *Ingenierías USBmed* proporciona acceso abierto a todos sus contenidos bajo los términos de la licencia creative commons Atribución no comercial SinDerivar 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)

Tipo de artículo: Investigación.

Recibido: 23-10-2020.

Revisado: 16-04-2021.

Aprobado: 12-05-2021.

Doi: 10.21500/20275846.5387

Referenciar así:

J. H. Wilches Visbal y D. G. Apaza Veliz, "Obtención del espectro de energía de un haz de electrones a partir del método de mínimos cuadrados," *Ingenierías USBMed*, vol. 13, n.º 1, pp. 40-45, 2022.

Disponibilidad de datos:

todos los datos relevantes están dentro del artículo, así como los archivos de soporte de información.

Conflicto de intereses:

los autores han declarado que no hay conflicto de intereses.

Editor: Andrés Felipe Hernández.

Universidad de San Buenaventura, Medellín, Colombia.

Resumen. Los haces de electrones en radioterapia engloban electrones primarios, secundarios y fotones de frenado. El espectro de energía de electrones es relevante para el cálculo preciso de la dosis. Los tres métodos más utilizados para encontrar el espectro de energía de los electrones son: i) simulación de la fuente; ii) medición directa y iii) reconstrucción inversa. La reconstrucción inversa se considera un método sencillo, fiable y rápido que consiste en extraer el espectro de energía de las curvas de dosis profundas mediante un modelo matemático adecuado. En este artículo, se propone utilizar el método de mínimos cuadrados no lineales, embebido en la función "lsqnonlin" de MATLAB, para determinar el espectro de energía de un haz de electrones y la dosis de los fotones que lo acompaña. Los resultados muestran una concordancia entre la PDP reconstruido (simulado en Monte Carlo mediante el espectro obtenido) y la PDP simulado (la extraída del sistema de planificación de tratamiento) superior al 95% con una precisión de 2% / 2 mm. Finalmente, se puede concluir que la función "lsqnonlin" es capaz de reconstruir el espectro de energía de un haz de electrones de manera eficaz y rápida.

Palabras Clave. Dosis, Fotones contaminantes, Mínimos cuadrados, lsqnonlin, Matlab, PENELOPE.

Abstract. In radiation therapy, electron beams are made up of primary, secondary, and stopping photons. The electron energy spectrum is relevant for the precise calculation of the dose. The three most used methods to find the energy spectrum of electrons are: i) source simulation; ii) direct measurement and iii) reverse reconstruction. Inverse reconstruction is considered a simple, reliable, and fast method that consists of extracting the energy spectrum from deep dose curves using a suitable mathematical model. In this article, it is proposed to use the nonlinear least squares method, based on the MATLAB "lsqnonlin" function, to determine the energy spectrum of the electron beam. Results show a concordance between the reconstructed PDP (simulated in Monte Carlo from the spectrum) and the simulated PDP (extracted from Treatment Planning System) greater than 95% with a precision of 2% / 2 mm. Finally, it can be concluded that the "lsqnonlin" function is able to reconstruct the energy spectrum of an electron beam efficiently and quickly.

Keywords. Dose, Contaminant Photons, Least Squares, lsqnonlin, Matlab, PENELOPE.

I. Introducción

Un haz de electrones consiste en un campo de radiación que involucra electrones puros y fotones de frenado [1]. El conocimiento preciso del espectro, la dosis de fotones contaminantes y la distribución angular de los electrones es crucial en dosimetría clínica [2], [3] y la planificación del tratamiento radioterápico [4].

Por medio del método Monte Carlo o usando teorías de transporte de radiación, se observan diferencias entre un haz monoenergético y un haz clínico de electrones a igual energía nominal del acelerador. Tales diferencias obedecen a electrones secundarios de menor energía y a fotones de frenado generados por los electrones primarios al interactuar con el cabezal del acelerador [5].

Los electrones secundarios generados depositan su energía en la parte más superficial de un fantoma o paciente, dado su corto alcance. Contrariamente, los fotones de frenado incrementan la energía entregada en las secciones más profundas [5], [6]. De aquí se extrae que la forma de la curva de Porcentaje de Dosis en Profundidad (PDP) de un haz clínico de electrones dependerá en gran medida de la cantidad de electrones por fracción de energía incidentes en el fantoma. Esto es, la forma de la PDP es críticamente dependiente del espectro de energía [4], [7], [8].

El espectro de energía de electrones se puede obtener mediante [9]: i) Simulación Monte Carlo de la fuente de radiación, que a pesar de ser el estándar oro [8], exige un conocimiento amplio de las estructuras internas del acelerador, es demorado y requiere de entrenamiento especializado [8], [9]. ii) Medición experimental mediante un espectrómetro magnético de electrones. Su principal inconveniente es el costo del equipo [10], [11]. iii) Reconstrucción inversa del espectro de energía a partir de curvas PDP que implica la resolución de un problema inverso [5], [7]-[11]. Aunque no es tan preciso como los otros dos, se considera atractivo por su sencillez, eficacia y rapidez [8]. No obstante, algunas de sus limitaciones tienen que ver con encontrar la dosis de los fotones contaminantes, la distribución angular y el mal condicionamiento de los problemas inversos [12].

Por tanto, el propósito de este trabajo es reconstruir el espectro de electrones del eje central a partir de curvas de PDP, ignorando la influencia de la distribución angular, a partir de la regularización de Tikhonov y el método de mínimos cuadrados.

II. Materiales y métodos

A. Modelamiento de la reconstrucción

La obtención del espectro de energía de electrones a partir de una curva PDP medida o simulada, $D(z)$, se fundamenta en la solución numérica de la ecuación integral de Fredholm tipo I [11], [13],

$$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} D(E, z) \varphi(E) dE, \quad (1)$$

donde $D(E, z)$ es una matriz de PDPs monoenergéticas variando entre E_{\min} y E_{\max} y $\varphi(E)$ es el espectro de energía del haz de electrones que alcanza la superficie del fantoma de agua. E_{\min} y E_{\max} son la energía mínima y máxima de los electrones del haz. Como la energía de los electrones no es continua, más bien discreta, la ecuación (1) debe ser discretizada, de manera que,

$$D(z) = \sum_i^n D(E_i, z_j) \varphi(E_i) \Delta E, \quad (2)$$

$$D(z) = K, \varphi \quad (3)$$

donde $K = [D(E_i, z_j) \Delta E]$ es el kernel de la ecuación (3), E_i es la energía del electrón i -ésimo, z_j es j -ésima profundidad de medición de la PDP. ΔE es el intervalo de energía, que se supone fijo, para fines de cálculo y n es el número máximo de electrones con energías diferentes dentro del haz.

El campo puro de electrones, es decir, la contribución de los electrones a la curva de PDP clínica, viene expresado por (1). La discretización del campo viene representada por (2). Sin embargo, aún falta introducir la contribución de los fotones contaminantes a la curva PDP.

Para encontrar la dosis de los fotones contaminantes, se puede utilizar el método de extrapolación lineal de la cola de la PDP. Dado que en una publicación anterior [14] se ha descrito cómo hacerlo, se ignorará este paso.

Como (3), se desprende de la Ecuación-Integral de Fredholm, también es mal condicionada. El mal condicionamiento significa que perturbaciones en los datos de la PDP a menudo conducen a irregularidades en el espectro reconstruido [5], [15]. Por esta razón, se requieren técnicas de regularización que filtren tales irregularidades y produzcan una solución útil y estable [13], [16]. Entre las técnicas de regularización, la de Tikhonov es de las más populares y efectivas para lidiar con este problema [15].

La idea principal de la regularización de Tikhonov consiste en minimizar la siguiente ecuación [15],

$$\min \left\{ \|K\varphi_\lambda - D_z\|_2^2 + \lambda^2 \|L(\varphi_\lambda - \varphi_0)\|_2^2 \right\} \quad (4)$$

donde, φ_λ es el espectro, λ es el factor de suavizado, L , la matriz de suavizado u operadores derivados y φ_0 es la solución inicial. Considérese que cada factor de la ecuación (4) está normalizado a su valor máximo. Así, para hallar, φ_λ , basta minimizar (4) a partir de algún método de optimización, tal como el de los mínimos cuadrados.

Los mínimos cuadrados es una de las técnicas de optimización más populares, eficientes y aplicadas para

encontrar el extremo (mínimo o máximo) local o global de una función. MATLAB, una de las principales plataformas de programación y procesamiento de datos, posee diversas funciones de optimización fundadas en esta técnica, entre las que se destaca *lsqnonlin*. Esta función resuelve problemas de mínimos cuadrados no lineales, con o sin restricciones, utilizando dos algoritmos: *trust-region-reflective* en inglés, que es el estándar, y *Levenberg-Marquardt*. En este trabajo se usará el primero de los dos algoritmos dado que permite agregar umbrales a las componentes del vector solución [17].

B. Proceso de Reconstrucción

Para construir la matriz de regularización, se simuló curvas PDP monoenergéticas con haces entre E_{\min} y E_{\max} por medio de PENELOPE Monte Carlo v. 2008 [18]. La geometría de la simulación fue la de una fuente puntual colocada en el vacío, 100 cm por encima del fantoma de agua de dimensiones $20 \times 20 \times 20 \text{ cm}^3$. El haz de electrones dibujó un campo de $10 \times 10 \text{ cm}^2$ en la superficie del fantoma.

La curva D_z se extrajo del sistema de planificación XiO v. 4.62 del acelerador lineal de electrones ONCORTM del Hospital das Clínicas de Ribeirão Preto- USP, para un haz de energía nominal de 6 MeV.

El factor y la matriz de regularización se determinan mediante las funciones `l_curve` y `get_l` del paquete de herramientas de regularización en [15].

La energía más probable del espectro, E_{mp} , puede hallarse a partir del conocimiento del valor del rango práctico, R_p [19],

$$E_{mp} = 0.22 + 1.98R_p + 0.0025R_p^2 \quad (5)$$

donde R_p se localiza a la profundidad que corresponde al 10% de la PDP.

La energía máxima del haz fue ajustada mediante la fórmula empírica,

$$E_{\max} = E_{mp} + \frac{E_{nom}}{5} \quad (6)$$

donde E_{nom} es la energía nominal del haz de electrones. Para calcular el espectro de energía de los electrones se siguen los siguientes pasos:

1. Se extrae la PDP simulada del sistema de planificación del tratamiento (SPT) o se mide directamente en un fantoma de agua. En este caso, se extrajo del STP.
2. A la PDP simulada se le resta la dosis de los fotones contaminantes y con la PDP obtenida, PDP de los electrones puros o D_z , se encuentra el valor del R_p . Una vez hallado el R_p se calculan las E_{\max} y E_{mp} , vía (5) y (6), respectivamente.
3. La matriz K se construye colocando como columnas a las PDP monoenergéticas de los haces simulados de acuerdo con el valor de la energía mínima y el valor del intervalo de energía. En este caso, se asumió

$E_{\min} = 0.125 \text{ MeV}$ y $\Delta E = 0.125 \text{ MeV}$ para aumentar la precisión de la reconstrucción, es decir,

$$K = [PDP_{0.125}, PDP_{0.25}, \dots, PDP_{E_{\max} \Delta E}] \quad (7)$$

Las PDP de K se simuló en PENELOPE.

4. El espectro inicial se supone como siendo una distribución gaussiana centrada en E_{mp} y cuya largura a media altura (FWHM en inglés *Full Width at Half Maximum*) se obtiene a partir de la expresión del rango terapéutico de un haz degradado hallada en [6].

5. Se escoge manualmente el orden de la matriz de regularización demandado por la función `get_l`. Se seleccionó la de orden 2. El parámetro de regularización fue el óptimo reportado por `l_curve`.

6. Los valores encontrados en los literales anteriores son colocados en la ecuación (4) para encontrar el espectro φ . Para minimizar (4) se usó la función *lsqnonlin* con restricciones en los componentes de φ , de manera que oscilaran entre 0 y 1.

7. Una vez obtenido el espectro, se utiliza como entrada en PENELOPE para obtener la PDP reconstruida. El número de eventos simulados se fijó en 2×10^8 , con una incertidumbre del 2% a la profundidad de máxima dosis.

C. Proceso de validación

Para evaluar la eficacia del método se utilizó el criterio del índice gamma 1D recomendado por la Asociación Americana de Físicos en Medicina (AAPM en inglés *American Association of Physicists in Medicine*) [20]: más del 95% de los puntos dentro de un círculo con diferencia de dosis (DD) menor o igual a 2% y distancia para concordancia (DTA) menor o igual a 2 mm (>95% con 2%/2 mm). El índice gamma se computa mediante la función *Calcgamma* desarrollada en [21].

El software usado para el diseño del algoritmo de cálculo y procesamiento gráfico de los resultados fue MATLAB R2015a, Win 7, SP1. CPU: 2.3 GHz, RAM: 4 GB.

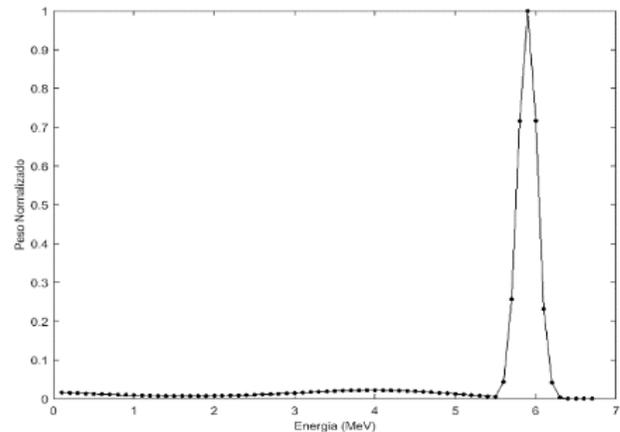


Figura 1. Espectro de energía normalizado de 6 MeV. Fuente: elaboración propia.

III. Resultados y discusión

En la Figura 1 se muestra el espectro del haz de electrones de 6 MeV de energía nominal reconstruido a partir de la PDP simulada.

Se observa la forma esperada para espectro de energía de electrones clínico, es decir, una región larga de baja energía seguida de un pico, centrado en la energía más probable, y finalmente una caída rápida hacia la región de más alta energía. La energía más probable del espectro reconstruido fue 5.9 MeV. El cociente $FWHM/E_{mp}$ resultó en 4.9%.

La Figura 2 muestra la curva de dosis de los fotones contaminantes, normalizada al valor máximo de la PDP (electrones + fotones). La forma de la curva es similar a la curva PDP de fotones de rayos X de alta energía, como puede constatarse en la literatura [8], [11].

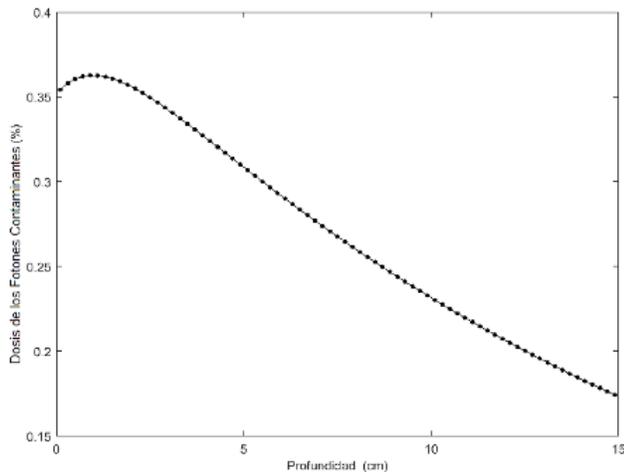


Figura 2. Dosis de fotones contaminantes del haz de electrones de 6 MeV en función de la profundidad.

Tamaño de campo de $10 \times 10 \text{ cm}^2$ y distancia fuente-superficie de 100 cm. Fuente: elaboración propia.

La profundidad de máximo valor de la dosis de los fotones contaminantes se ubicó a los 0.9 cm desde la superficie del objeto simulador, para una dosis de 0.36% del valor máximo de la dosis total entregada por el haz. De este modo, la mayor contribución de los fotones contaminantes al PDP se produce en la región de acumulación de la PDP y va decayendo progresivamente en profundidad, aunque a una tasa menor a la que cae la PDP de los electrones, toda vez que los fotones no tienen rango.

La contribución media de la dosis de los contaminantes a la PDP no supera el 0.25%, por lo que su incidencia en el modelado en haces de alta energía de menor valor, como el usado en este trabajo, puede ser obviada. Sin embargo, a medida que aumenta la energía nominal del haz parece tornarse más importante esta contribución [11], [22].

La Figura 3 muestra el resultado de la comparación de la PDP suministrada por el sistema de planificación del acelerador lineal Oncor™ (PDP simulada), y la PDP obtenida en PENELOPE, a partir del espectro de energía reconstruido (PDP reconstruida).

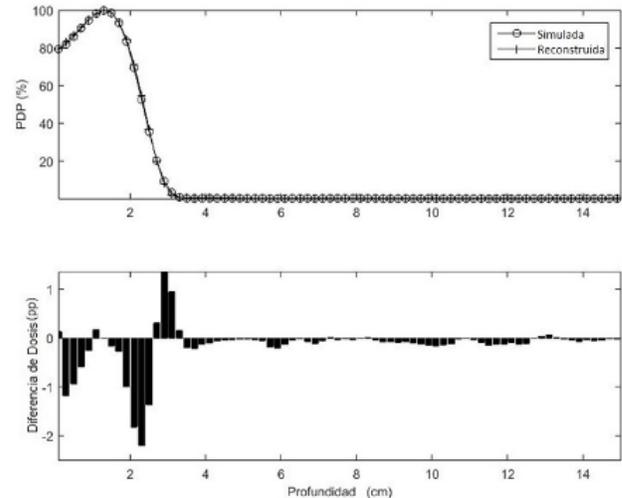


Figura 3. Comparación entre la PDP simulada y la reconstruida para el haz de 6 MeV. Se muestra la diferencia de dosis en puntos porcentuales (pp) entre las PDP para cada valor de profundidad. Fuente: elaboración propia.

De la Figura 3, se percibe que la diferencia de dosis, para cada profundidad, entre las curvas PDP son en su mayoría menores a 2 pp. Es de destacar que, en la región de la cola de la dosis, ubicada a partir de los 3 cm, la diferencia entre las PDP es ínfima, indicando, presumiblemente, una buena reconstrucción de la dosis de los fotones contaminantes.

La tasa de aprobación según el índice gamma de la PDP reconstruida con respecto a la PDP simulada, fue del 100% con 2%/2 mm. Bajo un criterio gamma más estricto (1%/1 mm), la tasa de paso se mantuvo al 100%.

Las curvas del espectro de energía del haz de electrones, la dosis de fotones contaminantes y la PDP están en consonancia con lo hallado en la literatura. La energía más probable del haz de electrones estuvo cerca de la energía nominal, mientras que el cociente entre $FWHM$ y la energía más probable se mostró mayor al indicado por [11], lo que parece indicar que la relación $FWHM/E_{mp}$ depende fundamentalmente de las características del cabezal del acelerador [23], más que en la energía nominal del haz.

El hecho de que la tasa de paso del índice gamma quedara por encima del criterio gamma recomendado clínicamente por la APPM, e, incluso, tomando un índice todavía más estricto (1%/1 mm), indica que el método de reconstrucción espectral basado en los mínimos cuadrados logró el objetivo propuesto.

No obstante, para verificar la idoneidad general de

la función *lsqnonlin*, sería conveniente tratar de reconstruir haces de electrones de energías superiores, como se realizó en un trabajo anterior donde se utilizó recocido simulado generalizado [22].

La ventaja comparativa del uso de esta función para la reconstrucción espectral con respecto a las funciones de recocido simulado, empleada en artículos anteriores [22], [24], radica en su mayor velocidad de cálculo sin pérdida de precisión, faltando constatar esto en haces de mayor energía.

IV. Conclusiones

Fue reconstruido el espectro de energía electrones de 6 MeV a partir de la PDP de un SPT, utilizando la sinergia de la regularización de Tikhonov y el método de mínimos cuadrados.

La tasa de aprobación de la PDP reconstruida del haz de electrones de 6 MeV fue superior al estándar clínico recomendado (más del 95% con 2%/2 mm), por lo que, al menos para esta energía, *lsqnonlin* ha logrado un resultado satisfactorio.

V. Trabajos futuros

Intentar obtener espectros de haces de energía nominal más alta, a fin de evaluar la capacidad de generalización del método.

Determinar el espectro a partir de PDP clínicas, esto es, medidas en un fantoma de agua, por representar mejor la realidad que una simulada.

Explorar otras configuraciones (options) de *lsqnonlin* podrían eficientizar el proceso.

VI. Agradecimientos

Los autores agradecen al Hospital das Clínicas de Ribeirão Preto, Universidade de Sao Paulo, por haber proporcionado la PDP simulada y a los revisores anónimos que contribuyeron a la mejora del presente manuscrito.

Referencias

- [1] T. C. Zhu, I. J. Das y B. E. Bjärngard, "Characteristics of bremsstrahlung in electron beams," *Med. Phys.*, vol. 28, n.º 7, pp. 1352–1358, jul. 2001. <https://doi.org/10.1118/1.1382608>.
- [2] P. Andreo, A. Brahme, A. Nahum y O. Mattsson, "Influence of energy and angular spread on stopping-power ratios for electron beams," *Phys. Med. Biol.*, vol. 34, n.º 6, pp. 751–768, jun. 1989. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/34/6/010>.
- [3] "Calculation of stopping-power ratios using realistic clinical electron beams," *Med. Phys.*, 1995. <https://doi.org/10.1118/1.597581>.
- [4] D. W. O. Rogers, B. A. Faddegon, G. X. Ding, C. M. Ma, J. We y T. R. Mackie, "BEAM: A Monte Carlo code to simulate radiotherapy treatment units," *Med. Phys.*, 1995. <https://doi.org/10.1118/1.597552>.
- [5] L. Zhengming y D. Jette, "On the possibility of determining an effective energy spectrum of clinical electron beams from percentage depth dose (PDD) data of broad beams," *Phys. Med. Biol.*, 1999. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/44/8/401>.
- [6] A. Brahme y H. Svensson, Radiation beam characteristics of a 22 mev microtron," *Acta Oncol. (Madr.)*, 1979. <https://doi.org/10.3109/02841867909128212>.
- [7] G. Li, H. Lin, A. D. Wu, G. Song e Y. C. Wu, "Realization and comparison of several regression algorithms for electron energy spectrum reconstruction," *Chinese Phys. Lett.*, 2008. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/25/7/104>.
- [8] G. Li, A. Wu, H. Lin e Y. Wu, "Electron spectrum reconstruction as nonlinear programming model using micro-adjusting algorithm," in *IFM-BE Proceedings*, 2008. https://doi.org/10.1007/978-3-540-79039-6_112.
- [9] C. Carletti, P. Meoli y W. R. Cravero, "A modified simulated annealing algorithm for parameter determination for a hybrid virtual model," *Phys. Med. Biol.*, 2006. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/51/16/004>.
- [10] B. A. Faddegon e I. Blevis, "Electron spectra derived from depth dose distributions," *Med. Phys.*, 2000. <https://doi.org/10.1118/1.598919>.
- [11] J. Deng, S. B. Jiang, T. Pawlicki, J. Li y C.-M. Ma, "Derivation of electron and photon energy spectra from electron beam central axis depth dose curves," *Phys. Med. Biol.*, vol. 46, n.º 5, pp. 1429–1449, may 2001. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/46/5/308>.
- [12] J. Wei, G. A. Sandison y A. V. Chvetsov, "Reconstruction of electron spectra from depth doses with adaptive regularization," *Med. Phys.*, vol. 33, n.º 2, pp. 354–359, ene. 2006. <https://doi.org/10.1118/1.2161404>.
- [13] A. V. Chvetsov y G. A. Sandison, "Reconstruction of electron spectra using singular component decomposition," *Med. Phys.*, vol. 29, n.º 4, pp. 578–591, mar. 2002. <https://doi.org/10.1118/1.1461840>.
- [14] J. H. Wilches Visbal y A. Martins Da Costa, "Determinação da Dose dos Fótons Contaminantes de Feixes de Elétrons Clínicos usando o Método de Recozimento Simulado Generalizado," *Rev. Bras. Física Médica*, vol. 11, n.º 2, p. 2, dic. 2017. <https://doi.org/10.29384/rbfm.2017.v11.n2.p2-6>.

- [15] P. C. Hansen, “Regularization Tools version 4.0 for Matlab 7.3,” *Numer. Algorithms*, vol. 46, n.º 2, pp. 189–194, nov. 2007. <https://doi.org/10.1007/s11075-007-9136-9>.
- [16] L. Zhengming, “A numerical method for solving the Fredholm integral equation of the first kind and its application to restore the folded radiation spectrum,” *Nucl. Inst. Methods Phys. Res. A*, 1987. [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(87\)91091-6](https://doi.org/10.1016/0168-9002(87)91091-6).
- [17] MATLAB, “Lsqnonlin function,” 2017. <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/lsqnonlin.html> (accessed feb. 04, 2021).
- [18] F. Salvat, J. Fernández-Varea y J. Sempau, “PENLOPE – A Code System for Monte Carlo Simulation of Electron and Photon Transport A Code System for Monte Carlo,” 2008. [Online]. Available: https://www.oecd-nea.org/jcms/pl_14442/penelope-2008-a-code-system-for-monte-carlo-simulation-of-electron-and-photon-transport.
- [19] B. J. Gerbi *et al.*, “Recommendations for clinical electron beam dosimetry: Supplement to the recommendations of Task Group 25,” *Med. Phys.*, vol. 36, n.º 7, pp. 3239–3279, jun. 2009. <https://doi.org/10.1118/1.3125820>.
- [20] I. J. Chetty *et al.*, “Report of the AAPM Task Group No. 105: Issues associated with clinical implementation of Monte Carlo-based photon and electron external beam treatment planning,” *Med. Phys.*, vol. 34, n.º 12, pp. 4818–4853, nov. 2007. <https://doi.org/10.1118/1.2795842>.
- [21] M. Geurts, “1D, 2D or 3D gamma index computation in Matlab,” *Github*, 2018. <https://github.com/mwgeurts/gamma/blob/master/CalcGamma.m> (accessed feb. 05, 2021).
- [22] J. H. W. Visbal y A. M. Costa, “Inverse reconstruction of energy spectra of clinical electron beams using the generalized simulated annealing method,” *Radiat. Phys. Chem.*, vol. 162, pp. 31–38, sep. 2019. <https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2019.04.022>.
- [23] P. Björk, T. Knäuper y P. Nilsson, “Influence of initial electron beam characteristics on Monte Carlo calculated absorbed dose distributions for linear accelerator electron beams,” *Phys. Med. Biol.*, vol. 47, n.º 22, pp. 4019–4041, nov. 2002. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/47/22/308>.
- [24] J. H. Wilches Visbal y A. Martins Da Costa, “Determinação de Espectros de Energia de Elétrons Clínicos a partir de Curvas de Porcentagem de Dose em Profundidade (PDP) utilizando o Método de Recozimento Simulado Clássico,” *Rev. Bras. Física Médica*, vol. 10, n.º 3, p. 7, dic. 2016. <https://doi.org/10.29384/rbfm.2016.v10.n3.p7-10>.