

El problema de la tomografía local enfoque wavelets

Recibido: agosto de 2012
Arbitrado: septiembre de 2012

Amed Alfonso C.*; Lucio Rojas C.**; Ricardo de Armas C.***

Resumen

En este artículo se explica el problema de la tomografía local y por qué es posible reconstruir imágenes localizadas, implementando algoritmos con bases wavelets. La solución de este problema reduce en la tomografía por transmisión la cantidad de exposición a los rayos-X, evitando en los pacientes daños colaterales en órganos como los pulmones, el corazón y lesiones de la médula.

Palabras clave

Tomografía local, datos locales, retroproyección filtrada, wavelets, soporte compacto, momentos de desvanecimientos, transformada de Hilbert.

Abstract

This article explains the local tomography problem and it is possible to reconstruct images with bases located algorithms implementing wavelets. The solution of this problem reduces transmission tomography the amount of exposure to X-rays, patients avoiding collateral damage to organs such as lungs, heart and spinal injuries.

Keywords

Local tomography, local data, filtered backprojection, wavelets, compact support, vanishing moments, Hilbert transform.

I. Introducción

Muchos han sido los esfuerzos para solucionar el problema de la tomografía local y poder reconstruir imágenes localizadas. El resultado son los enfoques propuestos para este fin como por ejemplo: la tomografía lambda, la tomografía pseudolocal y el enfoque basado en bases wavelets, entre otros [1], [2], [3]. Todos ellos tratan de responder la pregunta *¿es posible reconstruir una imagen tomográfica usando únicamente las integrales de línea que pasan por la región de interés?* Un método muy implementado para reconstruir imágenes tomográficas es el algoritmo de la retroproyección filtrada (filtered backprojection). Al procesar los datos (proyecciones) el algoritmo requiere de todas las integrales de línea de la función del objeto [4], [5]. Las bases wavelets por sus características logran neutralizar los efectos del algoritmo de la retroproyección filtrada; dado que los momentos de desvanecimientos y el soporte compacto de las wavelets se preservan bajo la transformada de Hilbert [6]. La solución en dos dimensiones del problema de tomografía

* Magíster en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT Medellín-Colombia. Profesor de la Universidad Central y Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá-Colombia. e-mail: amed080808@yahoo.com

** Magíster en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT Medellín-Colombia. Profesor de la Universidad Central y Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá-Colombia. e-mail: luciorojascortes@gmail.com

*** Magíster en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT Medellín-Colombia. Profesor de la Universidad Central y Universidad de La Salle. e-mail: rde_armasc@ucentral.edu.co

local ha permitido avances en disciplinas como la medicina, en donde en ciertas situaciones el estudio se realiza sobre una región de interés por lo que no hay necesidad de exponer al paciente con grandes cantidades de radiaciones evitando daños colaterales en órganos atravesados por los rayos-X como el corazón, los pulmones y también en lesiones de la médula. También es posible reconstruir imágenes con pocas muestras obtenidas de ensayos no destructivos del objeto como es el caso con los estudios antropológicos, en las investigaciones de las ciencias forenses, en la arqueología y en la paleontología.

Este artículo se estructura de la siguiente manera: en la sección 2, se ubica a la tomografía dentro de la familia de los problemas inversos; en la sección 3, se revisa la reconstrucción de una imagen tomográfica recordando los conceptos de proyecciones, transformada de Radon, sinograma, y el algoritmo de la retroproyección filtrada; en la sección 4, se analiza el problema interior o región e interés enfatizando en los beneficios de la solución; en la sección 5, se explica lo que le sucede a las bases locales que no son wavelets después de la operación de filtrado. Por último se presentan las conclusiones.

II. Problemas inversos

La historia de las matemáticas contiene una variedad de problemas inversos. A continuación se ilustran dos ejemplos.

¿Cómo reconstruir una función tridimensional a partir de sus integrales de área en dos dimensiones?

Una solución a este problema fue encontrada por el físico holandés H. A. Lorentz. Las razones por las cuales no publicó este resultado son desconocidas hoy en día. En 1906 H. Bockwinkel referenció la solución de Lorentz en su trabajo sobre la propagación de la luz en los cristales.

¿Cómo reconstruir una función bidimensional a partir de sus integrales de línea?

La solución a este problema fue encontrada por el matemático austriaco Johann Radon. El 30 de abril de 1917 Radon presentó sus resultados en la reunión anual de la Sociedad Real de Ciencias Físicas y Matemáticas de Sajonia. Esta solución contiene los fundamentos matemáticos que permiten la reconstrucción de las imágenes tomográficas [7], [8], [9], [10].

III. Reconstrucción de imágenes tomográficas

La reconstrucción de imágenes tomográficas es un proceso que involucra los conceptos de: proyecciones, transformada de Radon, sinograma y algoritmos de inversión como el de la retroproyección filtrada.

3.1 Las proyecciones

Una proyección en un ángulo dado se define como un conjunto de integrales de línea en dicha dirección. Se denota la proyección con $R_q(s)$ en donde q es el ángulo que indica la dirección de las integrales y s es la variable que indica la posición del detector para el conteo de fotones de los rayos-X [11], [12], [13]. La figura 1 ilustra dos proyecciones o como se les conoce también perfiles de atenuación $R_{q_1}(s)$ y $R_{q_2}(s)$.

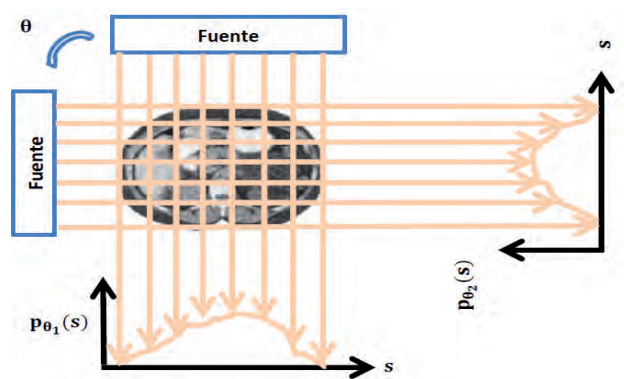


Figura 1. Proyecciones o perfiles de atenuación $R_{q_1}(s)$ y $R_{q_2}(s)$. Corte de un abdomen.

Con una colección de n proyecciones o perfiles de atenuación paralelos medidos $\{R_{q_1}(s), R_{q_2}(s), R_{q_3}(s), \dots, R_{q_n}(s)\}$ será reconstruida la imagen tomográfica.

3.2 La transformada de radon

En dos dimensiones es una transformada que mapea una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en el conjunto de las proyecciones $p_{\theta}(s)$. Cuando se representa una línea por $x \cos \theta + y \sin \theta = s$, donde s es la mínima distancia desde la recta al origen y θ es el ángulo que forma el eje X con el vector posición del punto de la recta más cercano al origen, entonces la transformada de Radon denotada por $R_{\theta}f(s)$, puede escribirse en términos de la distribución- δ (distribución delta Dirac) [14], [15].

$$R_{\theta}f(s) = p_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (1)$$

La figura 2 ilustra la línea $x \cos \theta + y \sin \theta = s$ de proyección a través del objeto. Se observan dos sistemas de coordenadas: el sistema de coordenadas de muestreo (θ, s) del tomógrafo y el sistema del paciente en reposo (x, y) .

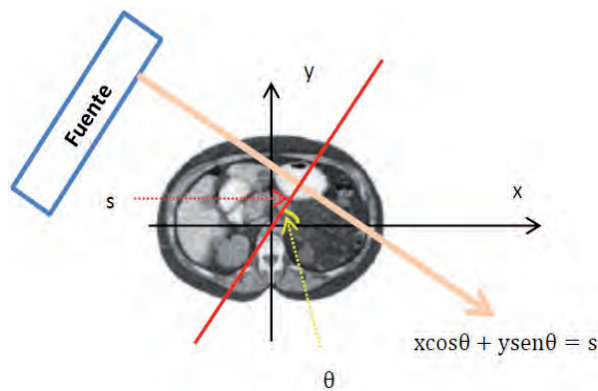


Figura 2. Línea $x \cos \theta + y \sin \theta = s$. Corte de un abdomen.

Para reconstruir la imagen $f(x, y)$ a partir de las proyecciones es necesario calcular la transformada inversa de Radon. Existen diversos algoritmos inversos de la transformada de Radon que son computacionalmente eficientes para el caso bidimensional. El problema es que no es posible definir el conjunto completo de las integrales. Muchos estudios demuestran que la imagen solo queda determinada por el conjunto infinito de sus proyecciones, pero no

por cualquier conjunto finito de proyecciones [14], [15], [16].

3.3 El sinograma

Para poder tratar los datos tomográficos se realiza una representación ordenada de estos con el fin de facilitar el posterior procesamiento. Se obtiene entonces el sinograma que es la representación gráfica de la matriz como se ilustra en la figura 3. b). en donde las filas indican los valores reales de las integrales y las columnas indican los ángulos de cada proyección. Los valores discretos de las proyecciones $p_{\theta}(s)$ representan el espacio de Radon del objeto. Los datos son adquiridos desde 0° hasta 180° únicamente, dado que, de acuerdo con la simetría física, las trayectorias de rayos-X por detrás del paciente que es examinado no proporcionan información diferente a las trayectorias ya medidas. La figura 3 ilustra el arreglo de los valores de las proyecciones en el espacio de Radon.

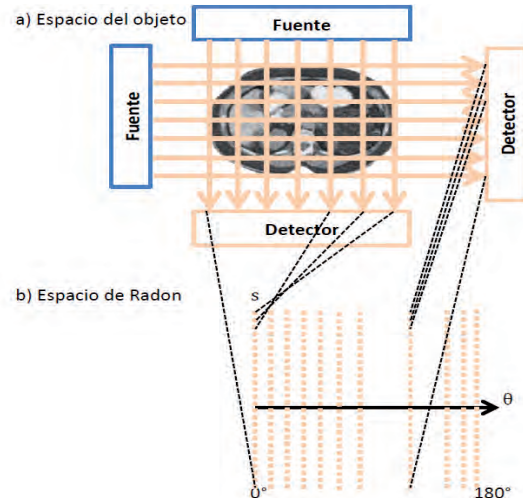


Figura 3. a. Valores medidos de las proyecciones en el espacio del objeto (x, y) b. Arreglo de los valores de las proyecciones en el espacio de Radon (θ, s) . Corte de un abdomen.

3.4 Algoritmo de la retroproyección filtrada

Un algoritmo inverso de la transformada de Radon computacionalmente eficiente para el caso bidimensional es el de la retroproyección filtrada (filtered backprojection). Este algoritmo aparece

de manera natural cuando se cambian las coordenadas. Para obtener la imagen $f(x, y)$ desde las proyecciones, se aplica la transformada inversa de Fourier de $F(u, v)$.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu-yv)} du dv \quad (2)$$

Se cambia a coordenadas polares

$$\begin{aligned} u &= \omega \cos \theta \\ v &= \omega \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{2\pi i(x\omega \cos \theta + y\omega \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \quad (4)$$

Utilizando las propiedades de simetría de la transformada de Fourier se extienden los límites de integración

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{2\pi i(x\omega \cos \theta + y\omega \sin \theta)} |\omega| d\omega d\theta \quad (5)$$

El teorema de corte de Fourier permite el siguiente cambio

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = F_0(\omega) \quad (6)$$

donde $F_0(\omega)$ es la transformada de Fourier en una dimensión de $p_0(s)$.

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F_0(\omega) e^{2\pi i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} |\omega| d\omega d\theta \quad (7)$$

Por último se denota con

$$p_0^t(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\omega) e^{2\pi i\omega s} |\omega| d\omega$$

a las proyecciones filtradas. Se integra y la imagen es reconstruida con el algoritmo de la retroproyección filtrada.

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} p_0^t(s) ds \quad (8)$$

Este algoritmo es el más implementado en la actualidad tanto en los tomógrafos de primera generación como un híbrido en algunos de última generación [17], [18].

IV. Tomografía local

En tomografía computarizada se pueden encontrar dos situaciones: cuando el muestreo produce datos completos e incompletos.

4.1 Datos incompletos

Si una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto (esto es, existe $c > 0$ tal que $f(x, y) = 0$ para $|f(x, y)| > c$) tiene su transformada de Radon $R_c f(s)$ definida (posiblemente de manera discretizada) sobre todo el espacio $S^1 \times [-1, 1]$ decimos que los datos son completos, de otra manera decimos que los datos son incompletos [15]. S^1 es el círculo unitario.

4.2 La región de interés

Un ejemplo de un problema de datos incompletos es el problema interior llamado también la Región de Interés ROI (Region of Interest). El problema interior se puede enunciar de la siguiente manera: *¿Cómo calcular los valores de $f(x, y)$ para todo (x, y) que satisfacen $x^2 + y^2 = \alpha^2$, con $0 < \alpha < 1$, a partir del conocimiento de las proyecciones de $f(x, y)$ sobre las líneas que pasan a través de la bola de radio α sobre el origen?* [15]. Ahora en vez de conocer la transformada de Radon $R_c f(s)$ de $f(x, y)$ para toda s en $S^1 \times [-1, 1]$, únicamente se conoce en la restricción $S^1 \times [-\alpha, \alpha]$. En la práctica la región de interés o localizada no siempre está en el centro del objeto; puede estar en cualquier sitio del soporte del objeto. Sin embargo, el análisis matemático se realiza por lo general asumiendo que la misma está en el centro del objeto [19], [20], [21]. La figura 4 ilustra los sinogramas de dos regiones localizadas una en el origen del objeto y la otra por fuera del origen.

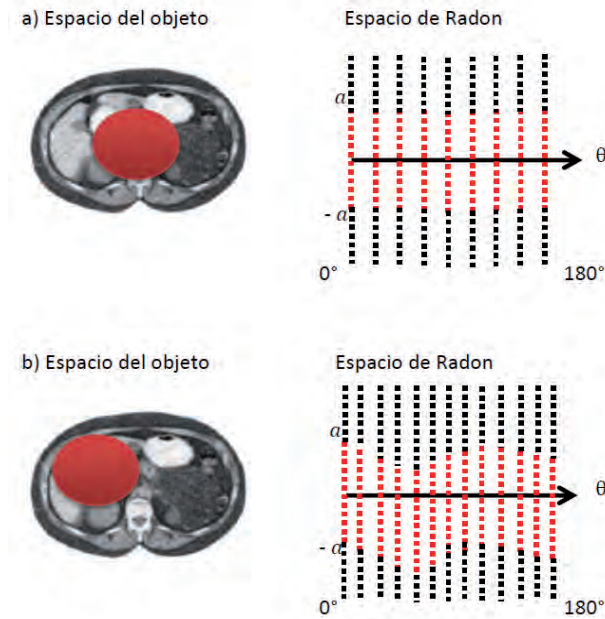


Figura 4. Sinogramas de las regiones de interés tomográfica.
 a. Región situada en el origen del objeto.
 b. Región situada por fuera del origen del objeto.
 Corte de un abdomen.

Contar con pocos datos es análogo a no escanear el corte de manera completa. Esto puede ser quizás porque probablemente no se está interesado en todo el corte completo sino en una pequeña parte (la región de interés) [15].

Beneficios

- En medicina, en ciertas situaciones, el estudio se realiza sobre una región de interés por lo que no hay necesidad de exponer al paciente con grandes cantidades de radiaciones evitando daños colaterales en órganos atravesados por los rayos-X como el corazón, los pulmones y lesiones en la médula.
- En otras ciencias, se pueden reconstruir imágenes con pocas muestras obtenidas de ensayos no destructivos del objeto como por ejemplo: en estudios antropológicos, en ciencias forenses, en arqueología y paleontología, entre otros.

La figura 5 ilustra problemas de datos tomográficos no locales en donde se obtienen las integrales

de línea a lo largo de todas las líneas que pasan a través del objeto; en la práctica esto se realiza a lo largo de una gran cantidad de líneas con muchos ángulos. En los problemas de datos locales se aprecia la reducción a la exposición ofrecida por el escaneo [22], [23].

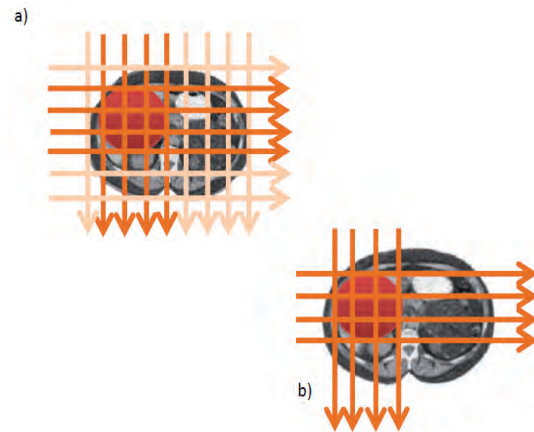


Figura 5. Problemas de datos.
 a. Completos, globales o no locales.
 b. Incompletos o locales.
 Corte de un abdomen

4.3 El problema de la tomografía local

¿Es posible reconstruir una imagen tomográfica usando únicamente las integrales que pasan por la región de interés?

Responder esta pregunta es resolver el problema de la tomografía local. Cuando el algoritmo de la retroproyección filtrada se ejecuta, las proyecciones en el dominio de la frecuencia $\mathbb{F}_0(\omega)$ son filtradas y se obtienen las proyecciones filtradas.

$$p_0^f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_0(\omega) |\omega| e^{2i\omega s} d\omega \quad (9)$$

El filtro $|\omega|$ produce un filtrado pasa altas a medida que aumentan las frecuencias por ser una función linealmente creciente y no acotada. La consecuencia es una imagen tomográfica degradada por el ruido. Ramachandran y Laksminarayan propusieron un corte en la banda de frecuencia con una función rectángulo.

$$W(\omega) = \text{rect}(\omega) \quad (10)$$

La ventana rectangular se denota de la siguiente manera:

$$R(\omega) = |\omega|W(\omega) \quad (11)$$

Las proyecciones filtradas se reescriben ahora como:

$$p_{\theta}^t(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\theta}(\omega)R(\omega)e^{2\pi i\omega'st} d\omega \quad (12)$$

De acuerdo con el teorema de la convolución el filtrado en (12) también puede ser formulado en el dominio espacial \mathbf{s} donde el producto $F_{\theta}(\omega)R(\omega)$ en el dominio espectral empieza como una convolución en el dominio espacial. Es decir,

$$p_{\theta}^t(s) = (p_{\theta}(s) * h(s)) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(x)h(s-x)dx \quad (13)$$

La función $h(\mathbf{s}-\mathbf{x})$ en el dominio espacial es la transformada inversa de la función $R(\omega)$ en el dominio espectral. El kernel de convolución $h(\mathbf{s})$ no es localizado. El principio de incertidumbre establece que si $h(\mathbf{s})$ es de soporte compacto sobre un intervalo de longitud $\Delta_{\mathbf{s}}$ y su transformada de Fourier $R(\omega)$ es de soporte compacto sobre un intervalo de longitud Δ_{ω} , entonces

$$\Delta_{\mathbf{s}}\Delta_{\omega} \geq 1 \quad (14)$$

Es decir, para localizar el soporte compacto de $h(\mathbf{s})$ sobre la región de interés de manera que la convolución no requiera más integrales, su transformada de Fourier $R(\omega)$ debe tener entonces un soporte compacto muy ancho en frecuencia [24], [25]. La función $|\omega|$ no es diferenciable en el origen y $W(\omega)$ causa discontinuidades en los cortes de banda. Las discontinuidades en los cortes pueden ser eliminadas con ventanas adecuadas; la diferenciable en el origen no se puede alterar sin dañar la estructura de la imagen. Bajo estas condiciones se tiene que la transformada de Fourier $R(\omega)$ de la función $h(\mathbf{s})$ no es suave y decae rápidamente por lo que la función $h(\mathbf{s})$ no podrá tener un soporte compacto dentro de la región de interés necesitando valores globales de la transformada de Radon o integrales distintas a las que pasan por la

región de interés para poder realizar la operación de convolución o filtrado en el dominio espacial [26], [27], [28], [29].

V. Enfoque wavelet

El problema de la tomografía local puede ser observado desde la reciente teoría wavelets. Esta teoría analiza el origen del problema de la tomografía local y propone soluciones aproximadas con buenos resultados como se puede ver con más detalles en [3].

5.1 Las wavelets

Las wavelets son funciones localizadas, suaves, con soporte compacto y un número determinado de momentos de desvanecimientos. La figura 6 ilustra la wavelet de Haar que tiene un soporte compacto de ancho uno, un momento de desvanecimiento y es discontinua.

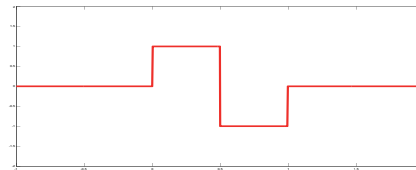


Figura 6. Wavelet de Haar.

Estas son generadas mediante dilataciones y traslaciones de una función llamada la wavelet madre.

$$\psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (15)$$

Donde $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ con $a \neq 0$ y ψ es admisible [30]. La wavelet madre ψ debe satisfacer la condición

$$\int \psi(t)dt = 0 \quad (16)$$

Esto implica por lo menos algunas oscilaciones. Con la transformada wavelet se pueden representar algunas funciones arbitrarias f como una

superposición de wavelets. Cada superposición descompone a f en diferentes niveles de escala, donde cada nivel es también descompuesto con una resolución adaptada para el nivel. Dos funciones wavelets: la wavelet madre Ψ y la función de escalamiento o wavelet padre Φ construyen los MRA o análisis multirresolución para analizar las señales. Esta herramienta matemática los MRA fue inventada por Mallat [30], [31], [32], [33], [34]. Con las wavelets se pueden construir bases ortogonales, bases de Riesz y marcos para espacios de señales de energía finita (como las proyecciones). El siguiente resultado demostrado por David Walnut relaciona la suavidad con los momentos de desvanecimientos y posibilita el desarrollo de algoritmos de reconstrucción de imágenes tomográficas localizadas.

Si la familia $\{\psi_{j,k}\}$ es una base ortonormal, y la wavelet ψ es suave, entonces ψ debe tener momentos nulos o de desvanecimientos.

5.2 El soporte compacto de bases no wavelets

La operación de filtrado en el algoritmo de la retroproyección filtrada se puede efectuar multiplicando primero por $(i\omega)$ en el dominio de la frecuencia

$$(i\omega)F_0(\omega) \quad (17)$$

y después aplicando la transformada de Hilbert

$$\frac{1}{i} \text{sign}(\omega)(i\omega)F_0(\omega) = |\omega|F_0(\omega) \quad (18)$$

donde

$$\text{sign}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega > 0 \\ 0, & \text{si } \omega = 0 \\ -1, & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (19)$$

La transformada de Hilbert impone una discontinuidad en la transformada de Fourier de cualquier función cuyo valor medio no es cero y discontinuidades en las derivadas de orden superior que no son cero en el origen. La imposición de estas discontinuidades en el origen en el dominio de la

frecuencia extenderá el soporte compacto de las funciones en el dominio espacial. Por esto las bases locales dejarán de ser locales después de esta operación de filtrado [28].

5.3 El soporte compacto de las bases wavelets

La extensión del soporte de las bases no se producirá si se tiene en cuenta que:

- La transformada de Fourier de las funciones es cero en el origen.
- La función es de media cero.
- La función tiene muchos momentos de desvanecimientos.

Las bases wavelets tienen estas características como se mencionó anteriormente. Además la transformada de Hilbert de una wavelet es también otra wavelet; los momentos de desvanecimientos y el soporte compacto se preservan [35], [36].

5.4 Algoritmos con bases wavelets

Por las razones expuestas anteriormente el diseño de algoritmos con bases wavelets para la reconstrucción de imágenes tomográficas locales es posible. David F. Walnut fue uno de los primeros en proponer estas bases para este tipo de algoritmos [6], [35]. Deben construirse bases de funciones con soporte compacto, y que tengan muchos momentos de desvanecimientos [30]. La segunda condición asegura que las funciones bases sigan siendo de soporte compacto después del proceso de filtrado y permitirá una reconstrucción a partir de los datos localizados. Las wavelets son generalmente construidas con tantos momentos de desvanecimientos como sea posible.

Las componentes de alta resolución de una transformada wavelet mantendrán su carácter local después de la filtración en la reconstrucción de la imagen de la transformada de Radon. Este enfoque es reciente y actualmente se encuentran algoritmos que usan estas bases wavelets únicamente con datos locales y algoritmos con bases wavelets con datos locales y un número determinado de datos

globales. Una alternativa es implementar las ideas de Meyer y Coifman sobre las propiedades de las wavelets para construir las proyecciones tiempo-frecuencia que producen resultados óptimos en la reconstrucción tomográfica local.

VI. Conclusiones

Se ha estudiado el problema de la tomografía local y porque las wavelets permiten por sus características la construcción de algoritmos de reconstrucción tomográfica local.

Este es un enfoque reciente con un desarrollo de 25 años aproximadamente. Hoy en día se encuentran algoritmos con bases wavelets para construir imágenes tomográficas usando únicamente datos locales que son muy eficientes y manejan buena resolución para el diagnóstico médico y con una reducción significativa de la cantidad de radiación.

Un estudio más detallado sobre algunos de estos algoritmos y su funcionamiento se puede encontrar en [3].

Referencias

- [1] A. I. Katsevich and A.G. Ramm, (1996) *Pseudolocal tomography* SIAM J. Appl. Math., 56.
- [2] K. Buglione. (1998) *Pseudolocal tomography, M.S. paper, Dept. of mathematics*, Oregon State University, Corvallis, OR 97331, U.S.A.
- [3] J. Villegas, A. Alfonso, and R. de Armas (2012) *El problema de la tomografía. Enfoque Wavelets*. Universidad Central. Bogotá. Colombia.
- [4] Defrise M., Gullberg G. T. (2006) *Image Reconstruction*. Phys. Med. Biol. 51.
- [5] Herman, G.T. (2009) *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections* (Advances in Pattern Recognition), 2nd ed, Springer.
- [6] C. Berenstein and D. Walnut (1994) *Local inversion of the Radon transform in even dimensions using wavelets*. In *75 Years of Radon Transform*, S. Gindlikin and P. Michor, editors, 45-69. International Press, Cambridge, MA.
- [7] P. Kuchment, K. Lancaster, and L. Magilezskaya. *On the structure of local tomography*. *Inverse Problems*. To appear.
- [8] M. Holschneider. *Inverse Radon transforms*. *Inverse problems*.
- [9] Radon, J., *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften*, Leipzig, Math.-Phys.Kl.
- [10] Radon J. (1986) *On the Determination of Functions from Their Integral Values along Certain Manifolds*, IEEE Trans. Med. Imag. (traducción al inglés del paper original de Radon de 1917).
- [11] Kalender W. A. (2006) *Computed Tomography: Fundamentals, System Technology, Image Quality, Applications*. Wiley.
- [12] Ge Wang, and Michael W. Vannier (1998) «Computerized Tomograph» *Department of Radiology, University of Iowa, Iowa 52242, Iowa City (USA)*.
- [13] Kak, C., and M. Slaney. (1988) *Principles of Computerized Tomography*. New York: IEEE press.
- [14] Deans, S. R. (1983) *The Radon Transform and some of its applications*. Ed: John Wiley and Sons Inc., New York.
- [15] F. Natterer. (1986) *The Mathematics of Computerized Tomography*. John Wiley&Sons, New York.
- [16] F. Natterer. (1985) *Fourier reconstruction in tomography*. Numer. Math.
- [17] Markoe, A. (1986) *Fourier inversion of the attenuated Radon transform*. SIAM J. Math. Anal. To appear.
- [18] Smith, K. T. (1984) *Inversion of the X-ray transform*. SIAM-AMS Proceedings.
- [19] A. Faridani, F. Keinert, F. Natterer, E. Ritman, and K. Smith. (1990) *Local and tomography*. In *Signal Processing, IMA Vol. Math. Appl.*, Vol. 23, Springer-Verlag, New York.
- [20] P. Maass. (1992) *The interior Radon transform*. SIAM J. Appl. Math.
- [21] Louis, A. ,K. , and A. , Reider. (1989) *Incomplete data problems in X-Ray computerized tomography*, *Numerische Mathematik*, 56.
- [22] A. Faridani, D. Finch, E. Ritman, and K. Smith. *Local tomography II*. SIAM J. Appl. Math., submitted.
- [23] Faridani, A., E. Ritman, and K. T. Smith. (1992) *Local tomography*, SIAM J Appl. Math., Vol. 52.
- [24] Logan, B. F. (1975). *The uncertainly principle in reconstructing functions from projections*. Duke Math. J.
- [25] Donoho, D. L., and P.B. Stark. (1989) *Uncertainty principles and signal recovery*, SIAM J. Appl. Math, Vol. 49.
- [26] Markoe, A. and Quinto, E. T. (1985) *An elementary proof of local invertibility for generalized and attenuated Radon transforms*. SIAM J. Math. Anal.
- [27] Quinto, E. T. (1980) *The dependence of the generalized Radon transform defining measures*. Trans. Amer. Math. Soc.
- [28] Benedetto, J. J. (1997) *Harmonic Analysis and Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- [29] Folland, G. B. (1992) *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks / Cole, Pacific Grove, CA.
- [30] Daubechies, I. (1992) *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM.
- [31] Mallat, S. (1998) *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego.
- [32] Chui, C. (1992) *An Introduction to Wavelets*, Volumes 1 and 2, Academic Press, San Diego.
- [33] Meyer, Y. (1993) *Wavelets & Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.,.
- [34] Strichartz, R. S. (1993) «How To Make Wavelets» Amer. Math. Monthly.
- [35] D. Walnut. (1993) *Local inversion of the Radon transform in the plane using wavelets*. In *Proc. SPIE 's Int. Symp. Optics, Imaging, and Instrumentation*. San Diego.
- [36] Albert Boggess. (2001) *Francis J. Narcowitch. A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. Prentice-Hall, Inc.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el Centro de Investigación para la Innovación – CIFI. Facultad de Ingeniería. Universidad Central. Colombia.