

Trayectoria de misil balístico intercontinental como trayectoria de vuelo propuesta para una aeronave de turismo espacial tipo SPACE-SHIP-ONE

**Trajectory of an intercontinental ballistic missile as flight path
of a spatial tourism SPACE-SHIP-ONE type aircraft**

Recibido:17 de mayo de 2013
Aprobado:21 de mayo de 2013

Wilson Pinzón Velasco*

Resumen

El presente documento contiene una reflexión preliminar sobre las particularidades de una trayectoria de vuelo de un misil balístico intercontinental con el fin de ajustar su estrategia de cálculo hacia el «diseño de una trayectoria de vuelo» para una aeronave de turismo espacial, aportando finalmente datos sobre la velocidad en la trayectoria de ascenso y descenso requeridas para el diseño aerodinámico posterior del mencionado vehículo.

Palabras clave

Trayectorias, misil balístico, ángulo de vuelo, cónicas, tiempo de vuelo.

Abstrac

The present document contains a preliminary reflection on the peculiarities of a flight path of an intercontinental ballistic missile, in order to adjust its strategy of calculation towards the «design of a flight path» of a spatial tourism aircraft, finally providing data on the speed in the path of ascent and descent, required for the subsequent aerodynamic design on the mentioned vehicle.

* Ingeniero Químico, Universidad Nacional de Colombia, Magíster en Ingeniería Química, Universidad Nacional de Colombia. Tutor Semillero de Estudios Astronáuticos (SE-AST), Universidad de San Buenaventura, Bogotá. E-mail: wpinzon@usbog.edu.co

Keywords

Trajectories, ballistic missile, flight path angle, conics, time of flight.

I. Introducción

El trabajo de grado «Diseño de una aeronave para turismo espacial», para optar al título de ingeniero aeronáutico en la Universidad de San Buenaventura que vienen desarrollando tres estudiantes de la universidad, se ha enfrentado al requerimiento de conocer algunos detalles sobre la trayectoria que ha de seguir la aeronave que pretenden diseñar desde la perspectiva aerodinámica, objeto central de su trabajo. Por esta razón, el Semillero de Estudios Astronáuticos (SE-AST) de la universidad, ha querido colaborar con el desarrollo de esta información básica y difundir además parte del trabajo que se realiza con estudiantes de los primeros semestres de la Facultad de Ingeniería.

II. Definición de una trayectoria viable para el vuelo

El interés está en identificar una trayectoria de vuelo que emule el viaje inaugural del SpaceShipOne del año 2004 (Figura 1) en el cual se logró una altura máxima de 110 km respecto del nivel del mar e identificar así las variables básicas que aportan algunos criterios adicionales para el diseño conceptual que adelantan los estudiantes.

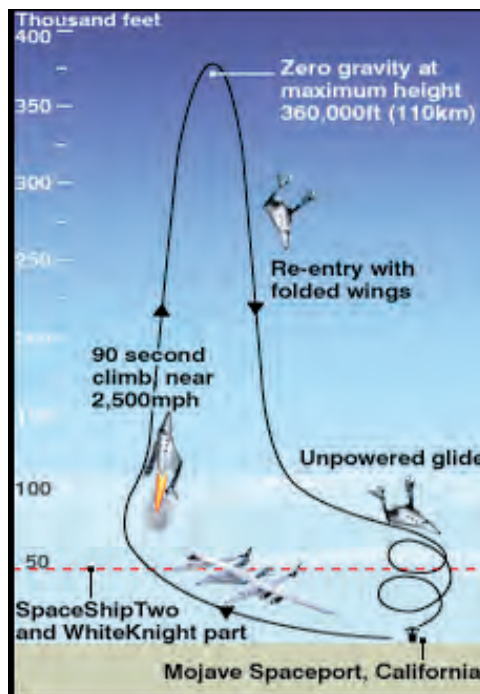


Figura 1. Vuelo del SpaceShipOne

Fuente: Imagen tomada del sitio web «círculo astronómico».

Se plantea, por lo tanto, la hipótesis de una trayectoria elíptica de impacto como la que tendría un misil intercontinental tierra-tierra.

La figura 2 presenta un esquema de trayectorias cónicas posibles de un cuerpo al gravitar respecto a otro «central», establecidas por la mecánica celeste. Es de notar que el radio perigeo o distancia al perigeo de cualquiera de las trayectorias, es generalmente la posición escogida para la puesta en órbita de satélites o sondas espaciales. Por esta razón, la distancia al perigeo y el punto de «Burnout», donde se suspende el vuelo propulsado para iniciar la trayectoria regidos por la mecánica celeste, suelen ser los mismos, hecho que no sucede en el lanzamiento de misiles intercontinentales por la obvia razón de que el perigeo está dentro del globo terráqueo.

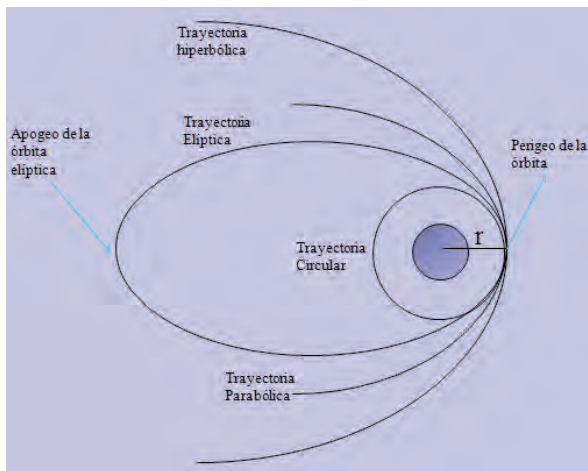


Figura 2. Trayectorias cónicas

En la figura 3 se observa, en cambio, una trayectoria de impacto dado su radio perigeo menor al radio terrestre, que las identifica como trayectorias de impacto y además, aparecen importantes parámetros a tener en cuenta para el diseño del curso a seguir por la aeronave, como son la altura de 55 km (Y_{bo}) –la misma altura para el «Burnout» del SpaceShipOne– en la que se suspende el vuelo propulsado y a la que se ha llegado después del vuelo convencional hasta cerca de los 15 km de altura, seguido del impulso otorgado por los motores cohete. Otros parámetros importantes son el ángulo «rango de vuelo libre» (ψ) y la «anomalía verdadera» (ϑ) que determina el ángulo barrido por el vector posición de la nave respecto al eje mayor de la elipse trazada, durante el vuelo no propulsado.

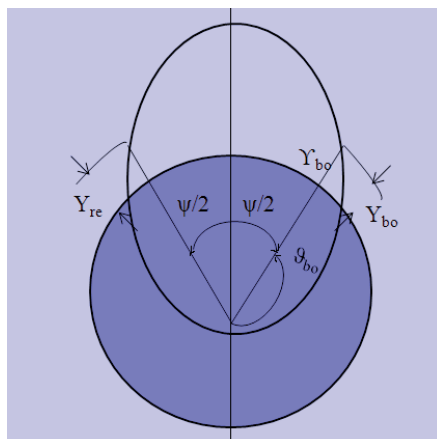


Figura 3. Órbita elíptica de impacto

Cabe destacar que para esta trayectoria la excentricidad «e» de la elipse es muy cercana a «uno»,—la figura tres no está a escala— lo que se corresponde con un radio perigeo muy pequeño de cerca de 300 metros (y un «diseño» de órbita elíptica muy angosta, es decir, con un semieje menor muy pequeño respecto del semieje mayor), (ver tabla 1), lo que para un cálculo inicial no implica nada particular salvo que este radio perigeo es menor que el radio terrestre como cabría de esperarse de una trayectoria de impacto.

Se inicia a la altitud (Y_{bo}), idealmente, el vuelo libre regido por la mecánica celeste si la atmósfera no fuese un fuerte obstáculo que generase desaceleración continua. Debe, además, haberse logrado en la aeronave la velocidad de unos 3700 km/h aproximadamente, y el ángulo de vuelo respectivo de 86° respecto a la horizontal local, -figura 4- para asegurar que la trayectoria libre sea una órbita elíptica de altura en el apogeo de 110 km respecto al nivel del mar (Y_a) —valor escogido por similitud al vuelo a imitar—, y un recorrido proyectado sobre la superficie terrestre cercano a los 15 kilómetros, distancia que separa a los aeropuertos de despegue y aterrizaje.

Es interesante anotar que la trayectoria hasta Y_{bo} , después de encender los cohetes propulsores, es una trayectoria guiada, controlada por sistemas de navegación inerciales para todos los aparatos con los que se pretende poner en órbita alguna carga en el espacio [1].

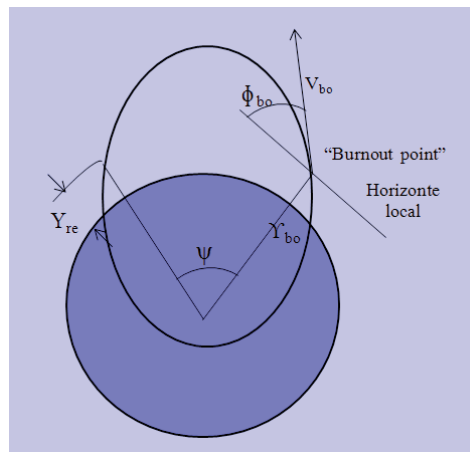


Figura 4. Ángulo de vuelo y velocidad en el «Burnout»

A continuación presentamos una estrategia de cálculo que permite establecer los detalles numéricos de la trayectoria (ver tabla 2), de manera que se tengan valores de velocidad y ángulos de vuelo para el intervalo entre el «Burnout» y el apogeo durante el ascenso, siendo estos mismos los datos del descenso gracias a la simetría con respecto al eje mayor de la elipse. Por la misma razón de simetría, la altura de reentrada a la atmósfera (Y_{re}), será también a los 55 km y la velocidad sería cercana a los 3700 km/h. La información de la tabla 2 da una idea inicial a los diseñadores aerodinámicos de las exigencias que en esta materia está proponiendo la trayectoria seleccionada o bajo estudio.

El detalle de los cálculos aerodinámicos deberá establecer cuál es el ángulo propicio para interactuar con la atmósfera en este reingreso y cuál es la geometría más conveniente de la

aeronave, con el propósito de lograr una entrada exitosa a la atmósfera. Aunque es muy crítico esto último, el diseño, además, debe acoplarse satisfactoriamente a todo el plan de vuelo.

III. Ecuaciones básicas de trabajo en el problema de los dos cuerpos

Por limitaciones de espacio, se hará a continuación solo una descripción de las ecuaciones básicas con las que se desarrollan los cálculos de mecánica celeste que permiten obtener la trayectoria general de las cónicas y sus expresiones matemáticas relacionadas de aplicación [2],[3], e igualmente con las expresiones que definen las particularidades de una trayectoria de impacto de un misil balístico intercontinental, pero sin presentar deducciones que, por otra parte, están disponibles en múltiples referencias bibliográficas [4].

Del análisis de la interacción recíproca por fuerzas de atracción entre los centros de masa de dos cuerpos de masa m_2 y M_1 , respectivamente y separados por una distancia r , se obtiene la ecuación de segundo orden vectorial diferencial del movimiento

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu/r^3 \mathbf{r} = 0 \text{ (en negrilla cantidad vectorial)}. \quad (1)$$

En esta expresión aparece el parámetro gravitacional « μ » igual a « $G(M_1 + m_2)$ » donde G es la constante de Cavendish. Generalmente $\mu = GM_1$ si $M_1 \gg m_2$, como se suele asumir en cálculos astrodinámicos, siendo « M_1 » la masa del cuerpo que genera la influencia gravitacional principal.

La ecuación 1 puede integrarse analíticamente para el caso de dos cuerpos, generando en la solución, la ecuación no vectorial de las cónicas «círculo, elipse, parábola e hipérbola», expresada en coordenadas polares para la trayectoria de la masa « m_2 » respecto a « M_1 ». La trayectoria particular en un problema específico dependerá del valor que se le asignen en ese caso, a las constantes de integración resultantes. De forma estándar se obtiene

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2}\right) \cos \theta}} = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta} \quad (2)$$

Donde (h) es el momento angular por unidad de masa y (ε) es una constante identificada con la energía.

Las trayectorias cónicas «círculo y elipse» implican movimiento acotado alrededor del centro gravitacional, en tanto que la parábola y la hipérbola constituyen trayectorias de escape respecto al centro gravitacional masivo M_1 , (figura 2).

El cuerpo « m_2 » tendrá una de estas trayectorias dependiendo de la relación de velocidad y distancia al centro gravitacional M_1 en cada punto de la trayectoria o, en otras palabras, dependiendo del valor de las constantes de integración, representadas por la excentricidad « e » de la órbita, el momento angular « h » y la energía total del sistema ε . La variable (r) es la magnitud del radio que separa los centros de masa de los dos cuerpos.

Con lo anterior queda así presentada la solución del problema de los dos cuerpos interactuantes gravitacionalmente.

El momento angular «h» de la trayectoria, puede extraerse implícitamente de la figura 4, ya que es una cantidad vectorial constante, resultante del producto cruz entre los vectores posición (r_i) y velocidad (V_i) en cada instante de la trayectoria (en la figura se establecería para el «Burnout»). Al ser un vector de valor constante, explica el hecho de que la trayectoria esté contenida en un plano. La ecuación 3 define analíticamente el valor de su magnitud puntual dado el ángulo de vuelo « ϕ », definido gráficamente en la figura 4, para cada instante o posición en la trayectoria.

$$h = r v \cos \phi \quad (3)$$

De la ecuación (2), se deriva fácilmente la expresión que establece la energía mecánica total específica « ε » del cuerpo en órbita « m_2 », en cualquier posición (r) en la trayectoria así

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (4)$$

De esta ecuación se desprenden las expresiones de velocidad de las trayectorias, como en el caso de la ecuación (5) que, sin consideraciones adicionales, representa directamente la ecuación de velocidad para la órbita elíptica al despejar la velocidad y, teniendo presente, que « ε » es un valor constante.

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r} + \varepsilon \right)} \quad (5)$$

Los valores de la energía mecánica total para cada una de las trayectorias se establece del siguiente modo:

Elipse « $\varepsilon = -\mu/2a$ », parábola « $\varepsilon = 0$ », hipérbola « $\varepsilon = \mu/2a$ » (Con «a» siempre positivo –e infinito para el caso de la parábola–).

De lo anterior, dependiendo del valor de « ε », se obtiene el cálculo del valor de la velocidad para cada órbita como función de la posición «r».

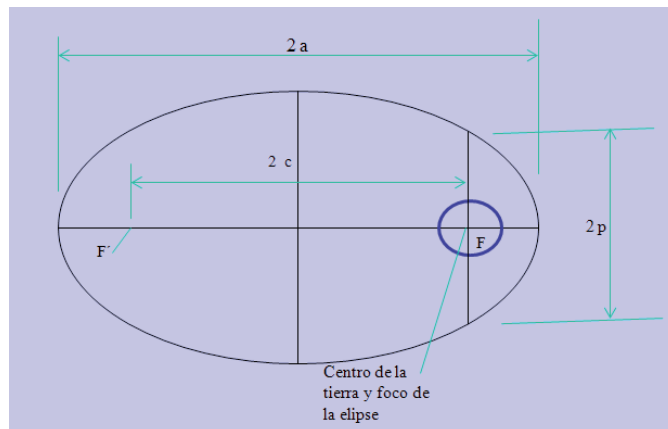


Figura 5. Magnitudes geométricas representativas en la elipse.

Otros parámetros o magnitudes de las trayectorias cónicas [5] que son importantes de definir matemáticamente para el cálculo a desarrollar son el semieje mayor «a», la excentricidad de la órbita «e», el Semi-Latus Rectum «P» y la anomalía verdadera, « ϑ » (ver figura 5 para el caso de la elipse), definidos con las ecuaciones 6, 8, 9 y 10 respectivamente.

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (6)$$

$$\text{En términos de parámetros balísticos: } a = \frac{r}{2-Q} \quad (7)$$

La ecuación (7) presenta un parámetro «Q», propio del problema del misil balístico [4], que será tratado más adelante. Las relaciones entre estos parámetros son:

$$e^2 = 1 - \frac{p}{a} \quad (8)$$

$$p = \frac{h^2}{\mu} = rQ \cos^2 \phi \quad (9)$$

$$\cos \vartheta = \frac{p-r}{er} \quad (10)$$

IV. Problema general del misil balístico

Hasta el momento se han presentado algunas de las ecuaciones frecuentes en la resolución de problemas para el caso de los dos cuerpos. A continuación presentaremos algunas de las ecuaciones de trabajo utilizadas al estudiar el problema general del misil balístico [4].

Definiendo:

$$Q = \frac{v}{v_{CS}} = \frac{v^2}{\mu} r \quad (11)$$

Donde «Q» es una cantidad que varía punto a punto en la órbita y que puede interpretarse como un criterio que permite establecer la viabilidad o no de una trayectoria elíptica de impacto dadas las especificaciones requeridas en la misma como ψ , ϕ , directamente, e indirectamente de los valores de Y_{bo} o r_{bo} , t_{ff} (tiempo de vuelo libre). La ecuación de la velocidad en la órbita circular derivada de Ecn 4 es

$$v_{CS} = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}} \quad (12)$$

Es fácil ver en la ecuación (11) por ejemplo, que $Q = 1$ cuando el misil (hipotético) o el vehículo a diseñar, está en un punto o instante del recorrido en la órbita, cuya velocidad de trayectoria es igual a la velocidad que tendría en una órbita circular a ese radio «r».

La ecuación (13), relaciona el «ángulo de rango de vuelo libre ψ », con el parámetro adimensional «Q» y con el ángulo de vuelo local en el «Burnout ϕ_{bo} ».

$$\cos \frac{\psi}{2} = \frac{1 - Q_{bo} \cos^2 \phi_{bo}}{\sqrt{1 + Q_{bo}(Q_{bo} - 2) \cos^2 \phi_{bo}}} \quad (13)$$

La ecuación 13 se asocia con la expresión modificada para el ángulo de vuelo (ecuación 14).

$$\text{sen} \left(2\phi_{bo} + \frac{\psi}{2} \right) = \frac{2 - Q_{bo}}{Q_{bo}} \text{sen} \frac{\psi}{2} \quad (14)$$

La figura 6 indica que se tienen 2 soluciones factibles o valores del ángulo de vuelo ϕ_{bo} para alcanzar un mismo ángulo de rango de vuelo ψ , pero solo un valor de ϕ_{bo} para un ángulo de rango de vuelo «máximo», dado un ψ ; ese valor de ϕ_{bo} que da el máximo en el rango de vuelo, se obtiene al hacer el lado derecho de la ecuación (14) igual a uno y despejando el valor buscado, pues solo hay un único valor que da solución a la igualdad. La anterior estrategia evita calcular la derivada de ψ respecto a ϕ e igualar a cero en la ecuación (14), en la búsqueda de un valor máximo.

$$\text{sen} \frac{\psi}{2} = \frac{Q_{bo}}{2 - Q_{bo}} \quad (15)$$

$$Q_{bo} = \frac{2 \text{sen} \left(\frac{\psi}{2} \right)}{1 + \text{sen} \left(\frac{\psi}{2} \right)} \quad (16)$$

La ecuación (15) obtenida tras igualar a uno, según lo expresado anteriormente, permite el cálculo de ψ máximo dado ϕ_{bo} , mientras que la expresión 16 permite obtener el valor más pequeño permisible de ϕ_{bo} dado ψ .

Si el propósito es impactar específicamente un sector particular a una determinada distancia del punto de partida, la ecuación (16) es una buena alternativa para un cálculo inicial. En el presente ejercicio, no es la distancia recorrida en el vuelo libre nuestro interés, sino asegurar « Y_{bo} y Y_a » idénticos o muy cercanos al vuelo del SpaceShipOne e identificar valores de la velocidad del vehículo durante el ascenso (y descenso); no obstante, sería un interesante trabajo para el lector calcular el rango máximo « ψ » para el ϕ_{bo} obtenido del cálculo en este trabajo, es decir «0,017045732» (ver tabla 1).

El tiempo de vuelo se calculó aplicando la ecuación de Kepler [6] (ecuación 19) calculando para ese efecto la anomalía excéntrica (E) y la anomalía media (M), para cada anomalía verdadera en la trayectoria. En este cálculo no se requiere hacer ningún proceso iterativo de solución para la ecuación de Kepler ya que aquí es plenamente conocida la anomalía verdadera.

$$\cos E = \frac{e + \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \quad (17)$$

$$M = E - e \text{sen} E \quad (18)$$

$$t_{vuelo} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} M \quad (19)$$

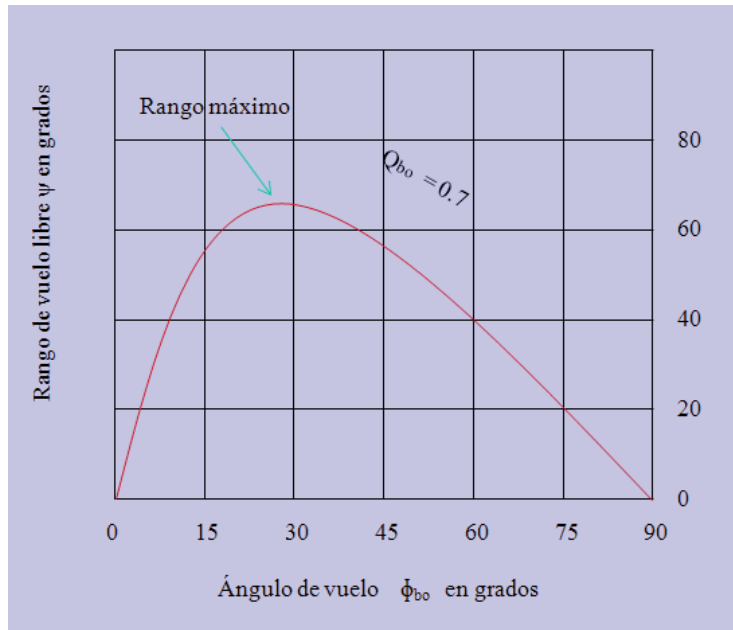


Figura 6. Rango de vuelo libre como función del ángulo de vuelo
Fuente: Fundamentals of Astrodynamics, [4].

Ejemplo de cálculo

En esta sección se presenta una secuencia de cálculo simplificada para obtener una primera evaluación de las características básicas de la trayectoria que debería seguir la aeronave a diseñar en el mencionado proyecto de grado. Se ha requerido operar un cálculo iterativo, como se indicará más adelante, que permitió encontrar los datos convenientes para generar una órbita elíptica factible y además de impacto.

Los datos de entrada son:

Y_a (km)	Y_{bo} (km)	V_{bo} (km/h)
110	55	3708,8

y μ (km³/sec²) es, en el sistema internacional, 3.986012×10^5

Estos tres valores de entrada deben ensayarse por una secuencia iterativa en la que V_{bo} , está subordinado a los datos de entrada para Y_a y Y_{bo} de manera que se permita una convergencia en la totalidad de los cálculos tanto de los valores constantes como los calculados punto a punto a lo largo de la trayectoria de ascenso (tabla 2). Por supuesto, hay diversas estrategias para desarrollar este ejercicio, al definir como datos de entrada otros valores más estratégicos, si es el caso, por ejemplo, el de fijar un alcance para el impacto. Sin embargo, en este caso interesaba mucho más fijar los valores de « Y_a y Y_{bo} », por la naturaleza del problema a abordar.

Calcular datos constantes:

Paso	VARIABLES	Valores
1	Energía mecánica total	-61,73484598 km ² /sec ²
2	Velocidad en el apogeo	272,057 km/h
3	Momento angular (a partir del apogeo pues $\phi_a = 0$)	490,319566 km/sec
4	Ángulo de vuelo en burnout (θ_0)	85,7573
5	Parámetro Q_{θ_0}	0,017045732
6	Semieje menor de la elipse	3244,220053 km
7	Semi Latus Rectum de la elipse	0,600184301
8	Excentricidad	0,999
9	Ángulo de rango de vuelo libre	0,144125 grados y equivalentes a cerca de 15 kilómetros en superficie.
10	Anomalía verdadera en el burnout	179,927937 grados

Tabla 1. Datos de valores constantes.

Como el cálculo inicia suponiendo valores para V_{θ_0} , que permitan la convergencia del conjunto de ecuaciones acopladas algebraicamente, aparece por ello en el paso 1 el cálculo de « ϵ », que requiere conocer una velocidad y un radio, los cuales son obviamente para este problema, los del «Burnout». Esto se puede programar de diversas maneras, en las que cabe el uso adecuado de la función objetivo de Excel entre otros artilugios básicos y armar una macro. Por supuesto, el ensayo y error manual, para entrar el valor de V_{θ_0} , no es descartable para los neófitos en la programación, ya que la convergencia es muy rápida y solo se requerirán unos pocos ensayos para detectar el valor «adecuado».

Cálculos a lo largo del ascenso entre el «Burnout» y el apogeo:

Los cálculos anteriores se efectúan punto a punto en la trayectoria, dando los siguientes resultados:

	θ grados	Y_i (km)	V_i en km/h	$\cos \phi$	ϕ GRAD	tiempo de vuelo libre (min)
Datos en Burnout	179,927937	55	3708,8064	0,07	85,7572975	0
	179,931665	60,5	3365,131462	0,08146742	85,3270818	0,091590896
	179,9356	66	3021,456524	0,09065648	84,7986252	0,188469479
	179,939785	71,5	2677,781586	0,10220438	84,1338771	0,291661387
	179,944276	77	2334,106649	0,1171531	83,2721717	0,402575084
	179,949153	82,5	1990,431711	0,13726421	82,1104311	0,523238008
	179,95454	88	1646,756773	0,16576987	80,4580395	0,656761409
	179,960647	93,5	1303,081835	0,20931199	77,9179638	0,808381915
	179,967882	99	959,406897	0,2840495	73,4979589	0,988308655
	179,977299	104,5	615,7319591	0,44221814	63,7545071	1,222894489
Datos en el apogeo	180	110	272,0570213	1	0	1,789508239

Tabla 2. Información de la trayectoria durante el ascenso desde «Burnout» hasta el apogeo

De la tabla 2 se puede extraer que la aeronave a diseñar debe ascender por vuelo combinado con propulsión convencional a reacción y posterior combustión de motores cohete, hasta una altitud de 55 km, alcanzando una velocidad de 3708 km/h, y presentando un ángulo de vuelo de 85,76 grados. En este momento deben apagarse los sistemas de

propulsión para iniciar el vuelo libre. La anomalía verdadera en este punto es de $179,93^\circ$. Se observa que este ángulo aumenta hasta alcanzar en el apogeo a los 110 km de altitud, el valor de 180 grados como era de esperar, mientras que el ángulo de vuelo, por el contrario, disminuye hasta los cero grados, e igualmente, se alcanza la velocidad mínima de la trayectoria, 272 km/h.

El vuelo del SpaceShipOne no fue superior a hora y media en ida y vuelta [7], teniendo en cuenta la trayectoria de ascenso y descenso de vuelo convencional. La presente estrategia propuesta para la trayectoria del avión de turismo espacial consiste en un viaje que, al menos teóricamente, sería mucho más corto, pues el tiempo de vuelo desde los 55 km hasta los 110 km de altura no supera los 2 minutos en un cálculo que no tiene en cuenta la fricción atmosférica; por lo tanto, el lapso entre el ascenso y descenso mientras se está en fase de vuelo libre no propulsado está alrededor de los 4 minutos como un máximo, bajo tales condiciones ideales de no resistencia aerodinámica. De acuerdo con la información que se encuentra en la página de la compañía «Scaled Composites», el ascenso desde el Burnout hasta el apogeo fue de 3,5 minutos, valor muy cercano al obtenido en este trabajo (2 minutos). Estos datos hacen pensar que «si el SpaceShipOne, siguió una trayectoria como la propuesta», tuvo una resistencia al avance significativa desde la perspectiva aerodinámica, lo que con toda seguridad hizo que su diseño aerodinámico haya sido un verdadero desafío de ingeniería, al tiempo que exigió planificar las trayectorias hasta los 55 km de ascenso y los 55 km de descenso para hacer que un vuelo total de unos cuantos minutos –según lo calculado para el misil balístico–, se haya transformado en un viaje de hora y media.

Referencias

- [1] R. H. Parvin, *Inertial Navigation* (- serie : Principles of Guided Missile Design). Ed. D. Van Nostrand Company. 1962.
- [2] J. G. Portilla, (2001). *Elementos de astronomía de posición* Ed. Universidad Nacional de Colombia.
- [3] J. G. Portilla,., El problema de los dos cuerpos y el problema principal del satélite artificial en ecuaciones diferenciales de primer orden. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 20 (76): 25-36 (1996).
- [4] R. Bate, D. D. Muller y J. E. White, *Fundamentals of astrodynamics* Ed. Dover. 1971. P. 137
- [5] J. H. Kindle, *Geometría analítica*. Ed. Schaum, 1982.
- [6] F. J. Hale, *Introduction to Space Flight*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [7] Disponible en http://www.scaled.com/projects/tierone/combined_white_knight_spaceshipone_flight_tests. Sitio web de la compañía constructora de vehículos aeroespaciales «Scaled Composites», fecha de indagación: mayo de 2013.
- [8] Disponible en <http://www.circuloastronomico.cl/secciones/espacio5.html>. Sitio web creado en Chile, dedicado a la divulgación y periodismo científico con énfasis en astronomía y astronáutica. Consultado en Abril de 2013.