

Modelaje matemático en la enseñanza de matemática en la ingeniería: posibilidades y dificultades*

Mathematical Modeling in Teaching Mathematics in Engineering: Possibilities and Difficulties

Recibido: 17 de noviembre de 2014 • Aceptado: 11 de diciembre de 2014

Para citar este artículo: J. Flores, «Procedimiento para obtener respuestas al impulso de un recinto, y su aplicación en sistemas multicanal», *Ingenium*, vol. 16, n.º 31, pp. 93-107, mayo, 2015.



Maria Salett Biembengut**

Resumen

En este artículo presento algunas reflexiones sobre la estructura educacional brasileña que ha permanecido igual al currículo guía en muchas asignaturas, en el tiempo suficiente para que estuvieran terminados y cada una de estas asignaturas está bajo responsabilidad de un profesor, haciéndose difícil obtener cambios significativos en la educación de los alumnos. Me he dedicado a investigar el Modelaje Matemático en la educación con datos empíricos, para la gran parte de estos estudios, obtenidos a través de experiencias en sala de aula en todos los niveles escolares; muchas de las experiencias ocurrieron en varias asignaturas de matemáticas en Ingeniería Industrial. Por ejemplo, presento una experiencia de modelaje que he hecho durante el primer semestre del año 2011 en la asignatura de Investigaciones Operativas. Usando modelaje como un método de enseñanza, busqué desarrollar la matemática que proporcionase a los alumnos la oportunidad de familiarizarse con técnicas que ellos lidiarán en el futuro y especialmente proporcionar la colaboración entre varios cursos de la asignatura. A pesar de que no subestimo la importancia del modelaje matemático, algunos aspectos de forma deberían ser chequeados, para no darle

* Artículo de reflexión, producto de la investigación llevada a cabo en el grupo Modelagem na Educação y en el Centro de Referencia de Modelaje en la Educación – CREMM (www.furb.br/cremm), patrocinado por la Pontificia Universidade Católica del Rio Grande del Sur – PUC-RS.

** Pós-doutorado em Educação. Universidad de São Paulo, Brasil. E-mail: maria.salett@puccrs.br

demasiado énfasis, olvidándose las limitaciones que produce la estructura educacional para ambos, tanto el profesor como a los alumnos.

Palabras clave

Matemáticas, modelo, industria, ingeniería, estructura educacional.

Abstract

In this paper I present some reflections about Brazilian educational structure that has remained the same with guided curriculum in many disciplines, not enough time for them to be thorough and each of these disciplines being under the responsibility of one teacher, making it difficult to produce significant changes in students' education. I have been dedicated to research in Mathematical Modeling in Education with empirical data for most of these studies were obtained through teaching experiences at all levels of schooling; among the experiments performed were in the various disciplines of mathematics in Industrial Engineering. As example, I present a Modeling' experience I did in the first semester of 2011 in the discipline of Operations Research. By making use of modeling as a method of teaching, I seek to develop mathematics that provides students the opportunity to familiarize themselves with issues that they will handle in the future and especially promote collaboration between the various courses of the discipline. Although we do not underestimate the importance of mathematical modeling some aspects should be checked as to not stress too much emphasis, forgetting the limitations that produce the educational structure for both the teacher and the students.

Keywords

Mathematical, modeling, industry, engineering, structure educational.

1. Presentación

Brasil, país de dimensiones continentales, posee un amplio parque industrial en casi todas las áreas, comercio y servicios. La producción brasileña no apenas atiende al propio mercado (200 millones de habitantes), sino también, exporta a diversos países. Colaboran para eso, centros de investigaciones de las propias industrias, muchos en alianza con centros de investigaciones de las universidades, a veces subsidiados por los gobiernos federal y estatal. Por ejemplo, uno de los importantes centros de investigación es EMBRAPA (Empresa Brasileira de Investigación Agropecuaria) que desde 1973 viene contribuyendo con la producción de alimentos en Brasil: mejorando la calidad, la variedad, entre otros; propiciando a la población alimentos de calidad en mayor cantidad.

En ese sistema social y productivo brasileño se requiere de un profesional caracterizado por: conocimiento general y específico, habilidad en aplicar este conocimiento y en la toma de decisiones. Parte de este conocimiento, es la matemática, una vez que haya una íntima conexión con la industria, el comercio y las diversas áreas asociadas con el desarrollo económico y social, según Damlamian y Sträber (2009). La mayoría de

estos profesionales están capacitados y se tornan aptos para desarrollar sus funciones; solo a partir de la experiencia y de entrenamientos/cursos promovidos por la empresa en que actúan, a pesar del período escolar, que debería 'cumplir esta función'. *¿Cuáles son las razones para que la mayoría de los estudiantes, en particular los de los cursos de Ingeniería Ingeniería, aprenda solo cuando pasa actuar en el campo profesional, a pesar del número de horas-aula y de los años de estudios?*

La investigación brasileña del sector productivo es tan significativa en cuanto a la investigación sobre cuestiones educacionales. Muchas de estas investigaciones han contribuido a reorientaciones en documentos curriculares oficiales, en los ámbitos nacional, estatal y municipal. A pesar de esa extensiva investigación en Educación Matemática, la enseñanza de la matemática en cualquier fase escolar (desde la educación básica hasta la enseñanza superior), salvo experiencias aisladas, no propicia en el estudiante la suficiente habilidad para interpretar y solucionar situaciones-problema. Pocas veces les son presentadas situaciones-problema que requieran una lectura e interpretación y, a continuación, la formulación y explicación de ese contexto. Sin esa vivencia, esa capacidad se pierde.

En la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral en diversos Cursos de la Enseñanza Superior, como de Ingeniería, por ejemplo, de acuerdo con estudios realizados (Biembengut 1997; 2007), buena parte de los respectivos profesores privilegian las técnicas y no las aplicaciones; descuidándose conceptos e ideas fundamentales relacionadas con ellas. Y cuando esos profesores muestran algunas aplicaciones, muchas veces son aquellas 'clásicas' que están en algunos de estos libros de Cálculo, como: *puntos críticos de función* de una o dos variables; *los límites de funciones* cuando se tiende a un punto, valiéndose de algunas clásicas *ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales*. Por ejemplo: «determinar la forma ideal de una caja para obtener máximo volumen con mínimo de material»; «el tiempo que lleva un líquido caliente para afectar una temperatura ambiente», etc.

Esos ejemplos de 'aplicaciones' que se hacen presentes en libros de Cálculo (CDI) y también, aquellos en libros de Investigación Operacional son presentados con la 'intención' de ilustrar y/o construir sentido con los estudiantes. No se están objetando las obras, el formalismo de los libros, los ejemplos propuestos por los autores, muchos de los cuales datan de los años sesenta. Pero sí, de los profesores que utilizan estos ejemplos, sin cualquier 'signo' para el curso en el que los estudiantes están (Ingeniería Ingeniería, Biología, Arquitectura, Administración, Química, entre otros), a pesar de los resultados obtenidos hasta la fecha. De hecho, esta forma de 'enseñanza' corrobora que muchos de los estudiantes no hayan aprendido 'Cálculo' o Investigación Operacional y/o no reconozcan la importancia de este en la solución de algunas situaciones-problema en el área de actuación profesional. *¿Cuál es la dificultad de los profesores en desvincularse de esta práctica a pesar de las críticas recibidas en razón al bajo desempeño de los estudiantes?*

Investigaciones en Educación Matemática, por ejemplo, indican que el profesor debe buscar medios para tornar las clases más interesantes, motivadoras; proponer procesos y métodos para que el profesor integre los contenidos programáticos a la realidad de los

estudiantes, que haga uso de los recursos tecnológicos, etc. En lo que se refiere a la enseñanza de la matemática, muchas investigaciones han buscado identificar « caminos para tornar la teoría matemática suficientemente clara al estudiante a fin de que pueda saber utilizarla en el momento requerido, en las actividades profesionales », según afirma Heilio (2009).

A pesar de las investigaciones e indicaciones, en Brasil, la estructura curricular de una buena parte de los Cursos de formación de profesores de matemática es dividida en una parte pedagógica y otra específica. En ambas partes, esta división es por asignaturas y cada asignatura es responsabilidad de un profesor. En general, cada profesor propone los contenidos y utiliza un libro-texto que mejor se adapte a sus necesidades. Y así, se torna 'especialista', sin conexión con otras asignaturas. Eso quiere decir, que el Curso tiene el 'especialista' en Cálculo Diferencial e Integral, o el 'especialista en Álgebra Lineal, o el 'especialista' en Geometría Analítica, y así sucesivamente. Y cada uno de estos profesores 'especialistas' espera que los estudiantes sepan todos los contenidos tratados, de todas las asignaturas.

En ese contexto, el método de enseñanza se restringe a la 'teoría' - presentar definiciones, propiedades y, en la secuencia, 'reglas' de resolución, sin nexo entre estas. La matemática, en general, es tratada de forma hermética, sin cualquier vínculo, ni entre la propia matemática; ampliando la línea divisoria entre conocimiento teórico y práctico. Las opiniones, sobre esta forma de considerar la enseñanza de la matemática, no son unánimes: sobre el saber 'las definiciones' y las 'técnicas', y saber lo que estas 'definiciones' representan y permiten comprender algo de la ciencia de la naturaleza, de las ciencias en general.

Las consecuencias de esa *estructura*, procedente de otras múltiples estructuras, se expresan en los resultados de la mayoría de los estudiantes al no saber aplicar la 'teoría' en sus actividades profesionales cuando es requerida. No sabe y, más aún, ni siquiera la reconoce. Sin saber y reconocer cómo esta teoría mantiene los datos sucedidos de algo práctico, ese estudiante al venir a actuar profesionalmente, tiene que 'comenzar a aprender' - 'rehacer' tan contradicho en las últimas décadas. Lo mismo le ocurre a aquellos que se encaminan a la docencia, que se tornan, muchas veces, profesores especialistas sin 'especialidad'.

A lo largo de estos años, la formación matemática de muchos de los que pasaron por la enseñanza superior ha estado en evidencia: se defiende la importancia de la matemática afirmando que está en 'todas partes', pero son pocos los que consiguen indicar «que partes» requieren además de conceptos elementales de aritmética, geometría y algunos de los sistemas de medidas. Y de generación en generación, los efectos residuales de esos hechos son evidenciados en los más diversos contenidos, en particular, en la enseñanza y en el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. El hecho, es que muchos estudiantes de Ingeniería circunscritos a la forma abstracta, sin relación de este Cálculo con los conceptos fundamentales de las Ciencias (de la naturaleza, sociales, etc.) no saben hacer uso de esta teoría en sus futuras prácticas, especialmente, cuando son requeridas en el campo profesional.

No se puede ignorar la evidencia de que buena parte de los profesores busca medios eficaces para que los estudiantes aprendan. Los recursos didácticos varían de acuerdo con el tema que se pretende tratar, empleando un método que se juzga adecuado para promover aprendizaje. Sin embargo, en esta estructura, sin que los profesores de asignaturas afines se reúnan para organizar una propuesta eficiente y cada profesor enseñando el contenido sobre su concepción, no contribuye para que los estudiantes perciban la realidad, se interesen por las cuestiones del medio, expresen propuestas, presenten una nueva creación. *¿En qué medida se puede cambiar la estructura educacional?*

Un posible método para minimizar las críticas a la enseñanza de la matemática en los cursos de enseñanza superior, en particular de Ingeniería, es el Modelaje Matemático: proceso utilizado desde hace siglos en toda la ciencia en general y, en el área de Ingeniería, en particular. El modelaje, como método de enseñanza con investigación, se ha revelado adecuado no apenas para tornar la matemática 'útil' al estudiante, sino, especialmente, para que el profesor de matemática de esos Cursos purifique sus conocimientos y, así, contribuya para la formación académica de los futuros profesionales.

En las últimas tres décadas, me he dedicado a la investigación en modelaje matemático (MM) en Educación, cuyos datos empíricos provienen de actividades pedagógicas en todos los niveles de escolaridad: desde los años iniciales de la educación básica, las diversas asignaturas de matemática en Cursos de Graduación y Posgrado. Entre las actividades pedagógicas se encuentran las realizadas en diversas asignaturas de matemática en los cursos de Ingeniería (Eléctrica, Civil, Química, Industrial, etc.). De los diversos aspectos analizados en estas investigaciones, uno de ellos me llevó a definir un método de modelaje en la educación – modelaje para la educación básica y enseñanza superior (Biembengut, 1990 y 1997), método que contribuyó no solo para que los estudiantes aprendan el contenido matemático, sino principalmente, para formular, resolver y tomar decisiones hacer investigación.

En este artículo, busco reflexionar sobre algunas cuestiones puestas en la presentación y, para ilustrar presento una de las centenas de actividades pedagógicas realizadas con estudiantes de Ingeniería. Esta actividad-ilustrativa, compuesto de datos empíricos de las investigaciones aplicadas que he realizado, a fin de reflexionar y perfeccionar la relación enseñanza y aprendizaje. En la tentativa de evitar que la reflexión se torne repetida y desplazada, el artículo se organiza en tres partes más: *Modelaje en la educación* (tópico 2); *Aporte empírico y analítico - ejemplo ilustrativo* (tópico 3); y *Consideraciones finales* (tópico 4).

2. Modelaje en la educación matemática - sobre un punto de vista

Modelaje es el proceso envuelto en la elaboración de un modelo de cualquier área del conocimiento. Se trata de un proceso de investigación. La esencia de ese proceso emerge en la mente de una persona cuando alguna duda genuina o alguna circunstancia la instigan a encontrar una mejor forma para alcanzar una solución, descubrir un medio para comprender, solucionar, alterar, o aun crear o perfeccionar algo.

Al modelar una situación-problema, un hecho o fenómeno, conceptos o teorías matemáticas, se hace el mismo trayecto de la investigación científica. Según Biembengut (2014), las fases de estas investigaciones pueden ser divididas en tres, así denominadas: *percepción y aprensión*; *comprensión y explicitación*; *significación y expresión*. A saber:

1. *Percepción y aprensión*: reconocer la situación-problema y familiarizarse con el asunto a ser modelado.
2. *Comprensión y explicitación*: formular el modelo y resolver el problema a partir del modelo.
3. *Significación y expresión*: interpretar la solución, legalizar el modelo y expresar el proceso y resultado.

Esas tres fases del proceso de modelación no son independientes. Por ejemplo, en la 2.^a fase, en la medida en que se está comparando, analizando los datos a fin de formularlos, se tiene que volver a la 1.^a fase; o durante la 3.^a fase, volver a la 2.^a para prever o generar ideas, o aun, retornar a la 1.^a fase para entender mejor los hechos y reunir los restantes elementos para llegar a una conclusión. Conocimiento y habilidades que se perfeccionan en la investigación que se realiza en cada actividad experimental, estudio, o situación que se requiere entender, perfeccionar, inferir y producir otros entendimientos.

Hay dos categorías de modelaje, no necesariamente disjuntas: una se refiere a la expresión física, y otra, a la expresión abstracta. En esos términos, denomino estas dos categorías de modelaje como: *Modelaje físico* y *Modelaje simbólico*.

- El *modelaje físico* se constituye en un proceso envuelto en la expresión, en la reproducción y/o en la descripción de un conjunto de datos o de imágenes o de un ente físico. El modelo resultante de esta forma de modelar puede ser de *escala* (diseño y/o réplica) o de *analogía* (representación gráfica y/o algébrica).
- El *modelaje matemático simbólico* se constituye en un proceso envuelto en la comprensión y en el análisis de un conjunto de datos de un ente físico (producto o proceso), de la naturaleza o del ambiente social. Se trata de un proceso más amplio. Comprender los diversos elementos que componen y que actúan en el medio, en la sociedad, puede posibilitar el control de esos elementos, el análisis de la interrelación de esos aspectos con otras fases, la producción de nuevas técnicas y tecnologías. El modelo simbólico resultante puede ser una doctrina, una teoría (Biembengut, 2014).

Como en esencia es un método de investigación, en estas cuatro décadas, es creciente la defensa por el modelaje como proceso o método de enseñanza de matemática en la educación superior, pues da la oportunidad al estudiante de realizar situaciones-problema por medio de la investigación, provocando su interés y su sentido crítico, riguroso, afinado y creativo. Investigar aquí no se refiere a la búsqueda de datos o informaciones.

Así, en diversos países, documentos oficiales de educación presentan más o menos explícitas indicaciones de la utilización del modelaje en educación. no solo en la enseñanza

de la matemática en los cursos de ingeniería, en particular, la expectativa es que por medio del modelaje el estudiante: comprenda situaciones-problema de algún campo de la Ingeniería en que tenga interés, aprenda conceptos matemáticos requeridos en la aplicación, perfeccione su capacidad para leer, interpretar, formular situaciones-problema y estimule su sentido creativo y crítico en la solución y evaluación.

Para que el estudiante de Ingeniería, aún en los primeros semestres del Curso, pueda adquirir conocimientos académicos y, al mismo tiempo, aprenda a investigar, el proceso de modelaje requiere una adaptación debido a la estructura de la educación. así, el modelaje en la asignatura de matemática, implica enseñar contenidos curriculares y, al mismo tiempo, enseñar al estudiante a hacer investigación. investigar requiere conocimiento del asunto de que se está tratando y de las teorías y técnicas que puedan subsidiar lo que se pretende entender mejor y, así, crear o proponer algo. parte de estas teorías y técnicas hacen parte del programa curricular escolar. así, modelaje en la educación - modelación es un método de enseñanza con investigación en los límites y espacios escolares. (biembengut, 2014).

El modelaje en la educación se propone brindar a los estudiantes mejor conocimiento de los asuntos presentes en los programas curriculares (y también los no presentes) y, al mismo tiempo, despertarles los sentidos crítico y creativo. Para abordar el contenido curricular, el tema (o situación-problema) es único para todos los estudiantes y de este tema se 'extrae' el contenido curricular. Y, paralelamente, si fuera posible, los estudiantes pueden desarrollar un estudio, una investigación sobre algún tema de acuerdo con intereses y afinidades; esa investigación es realizada en grupos con tres o cuatro estudiantes. Esto es, los estudiantes, en el primer día en que se va a iniciar la asignatura por medio del modelaje, se agrupan y escogen el tema a ser estudiado para este trabajo.

En los cursos de Ingeniería, debido a la estructura vigente (semestral, sistema de créditos, asignaturas, horario) y a la dificultad del profesor de matemáticas, en corto espacio de tiempo, para plantear una situación-problema donde la matemática sea requerida, puede usar el modelaje como método de enseñanza (Cálculo - CDI, Geometría Analítica, Investigación Operacional, etc.) bajo dos abordajes: uno, que permita desarrollar el contenido curricular a partir de un rehacer modelos aplicados al área y, al mismo tiempo, presentar el proceso del modelaje y, en otra, en orientar a los estudiantes a modelar. (Biembengut, 1997).

La esencia del modelaje matemático en la educación - modelación privilegia, en los estudiantes, la asociación de elementos existentes en lo referente al propio tema. Esa asociación puede incluir un modelo o aplicación existente o una ley fundamental o, también, un cambio de variable. La expectativa es que si los estudiantes aprenden a traducir las cuestiones reales o las que imaginan en lenguaje matemático y se interesan por presentar soluciones, medios de verter la producción en términos comprensibles, se puede esperar una mejor formación cuando actúen profesionalmente.

Vale remarcar, que mi vivencia en esas tres décadas, con resultados de prácticas en sala de aula, con estudiantes en todas las fases de escolaridad, desde la educación infantil hasta el posgrado *lato* y *stricto sensu*, me hace continuar apostándole a este camino.

las prácticas pedagógicas en la enseñanza superior (ingenierías, arquitectura, biología, etc.) iniciaron en 1990, los resultados de éstas de forma directa o indirecta, por medio de profesores adeptos a mi propuesta, me llevan a defender al modelaje en la educación. y aún, provocando a otros tantos profesores a recorrer este camino, a pesar de la estructura educacional vigente que es prácticamente la misma del inicio del siglo XX: currículo pautado en muchas asignaturas, tiempo insuficiente para que sean profundizadas y cada una de esas asignaturas sobre la responsabilidad de un profesor, dificultando que cambios significativos se produzcan en la formación de los estudiantes. *¿Cómo cambiar esta estructura y volver la escuela un espacio para promover conocimiento?*

3. Aporte empírico y analítico → un ejemplo ilustrativo

Desde el principio del año 1990, se han coordinado diversos proyectos cuyos datos empíricos a partir de prácticas pedagógicas realizadas directa o indirectamente (por medio de otros profesores) en asignaturas de matemática en cursos superiores, en especial, en cálculo diferencial e integral en cursos de ingenierías. cada curso de ingeniería cuenta con alrededor de 4000 horas/aula, subdivididas en diversas asignaturas, agrupadas en cuatro áreas: *común* (formación general y básica); *profesional* (formación específica común y específica por opción); *pasantía* y *trabajo de final de curso*.

Las asignaturas del área común, de acuerdo con la especificidad, son de responsabilidad de otros departamentos, como: pedagogía, administración, matemática. las asignaturas de matemática, son responsabilidad del departamento de matemática, ocupan el 15 % del curso, distribuidas en: Cálculo Diferencial Integral, Álgebra Lineal y Geometría Analítica, Cálculo Numérico, Estadística Descriptiva y Probabilidad y Métodos Estadísticos, Matemática Financiera, Investigación Operacional, etc. En general, son administradas por diferentes profesores de Matemática; algunos iniciantes, otros en final de carrera. Lo que significa, diferentes concepciones sobre la Matemática y la enseñanza. Cada semestre lectivo, el Departamento informa los profesores que, no necesariamente actúan en los mismos cursos en los semestres posteriores, impartirán estos cursos. Se identifica aún, que en estas asignaturas son priorizadas las técnicas en detrimento a las teorías, a pesar de los softwares matemáticos; y las aplicaciones quedan restringidas a las 'clásicas' que hacen parte de los libros textos; muchas veces, escritas hace décadas.

Para ilustrar, se presenta una de las centenas de prácticas pedagógicas realizadas, cuyos datos empíricos resaltan que 'acciones aisladas' no promueven el conocimiento requerido en la formación de estudiantes, en particular de Ingeniería, pero indican a los 'profesores de matemáticas' revisar sus 'especialidades'. Esta práctica pedagógica, utilizándose como método el modelaje en la educación - Modelación, ocurrió durante un semestre lectivo en 2011 con un curso de Ingeniería Industrial de una Universidad del Sur de Brasil, en la disciplina de Investigación Operacional junto a 32 estudiantes del Curso de Ingeniería Industrial. Uno de los desafíos del ingeniero industrial es desarrollar y aplicar procesos y métodos que permitan la fabricación de ítems de consumo en gran escala, con rapidez y, principalmente, con mínimo impacto negativo sobre la naturaleza.

Así, el aporte empírico de esa investigación fue obtenido de los estudiantes, por medio de evaluaciones escritas individuales en la forma tradicional (resolución de problemas volcados a la Ingeniería - aplicación matemática, explicitación de la teoría matemática y aplicación de técnicas de resolución); trabajos de modelaje realizados en grupo; observaciones sobre las actitudes de los estudiantes en las clases y durante la orientación de los trabajos y entrevistas concedidas por ellos. El objetivo principal fue verificar el interés en aprender. Los procedimientos metodológicos se organizaron a partir de las teorías que direccionaban la enseñanza y el aprendizaje y de la aprehensión empírica de las actividades realizadas.

Hacer modelaje supone estudio e interpretación de un asunto de algún área del conocimiento, planteamiento de cuestiones cuyas respuestas o soluciones requieren formulación para resolverlas. Y para utilizar modelaje en la educación es preciso que el profesor sepa hacer modelaje y, también, sepa adaptar algunos modelos pertinentes al curso que le permitan desarrollar los contenidos programáticos y despertar el interés de los estudiantes para aprender.

El modelaje en la educación es orientado por el desarrollo del contenido programático a partir del modelo-guía que permite al estudiante, también, comprender el proceso del modelaje y, paralelamente, a aprender a modelar. En asignaturas de Matemática de cursos de Ingeniería se requiere la preparación de un modelo-guía sobre algún tema del área y un conjunto de ejemplos con aplicaciones para desarrollar el contenido curricular; y, paralelamente a las clases, los estudiantes elaboran un trabajo de modelaje.

Cada contenido del programa es desarrollado con menor o mayor énfasis en sintonía al modelo y a las aplicaciones propuestas, los programas computacionales para la resolución de cuestiones y representación gráfica es siempre utilizado. Como el modelaje en la educación – Modelación aún no es un método 'tradicional', es decir, 'que se utiliza comúnmente', se hace uso de los datos empíricos obtenidos para comprender mejor las diversas ocurrencias, perfeccionar el proceso y, quien sabe en algún momento, cambiar la estructura educacional.

Para desarrollar el contenido y al mismo tiempo, enseñar a los estudiantes a modelar, la disciplina fue organizada en tres momentos, definidos anteriormente: *percepción y aprensión; comprensión y explicitación; y significación y expresión*. El modelo-guía elaborado, previamente, fue sobre *adquisición de un área para la construcción de 620 viviendas a las personas afectadas en un desastre ambiental que ocurrió en la región sur de Brasil en 2011* La tragedia llevó a la muerte a muchas personas y miles afectadas.

1. *Percepción y aprensión*: en esta fase, se inició la clase recordándoles a los estudiantes *la inundación y deslizamiento* ocurridos y explicitando las posibles causas, a fin de que los estudiantes reconozcan la situación-problema, familiarizarse con el asunto a ser modelado y levantar cuestiones y seleccionar la cuestión adecuada al desarrollo del contenido curricular.

La región donde ocurrió esta tragedia (inundaciones y deslizamiento) se ubica en el sur de Brasil, geográficamente se posiciona en el sentido este-oeste, siendo cortado por un

Río con aguas abajo al este. Las corrientes de aire frío venidas del Polo Sur en sentido ortogonal al valle, además de llegar a la región húmeda, cuando se encuentran con las corrientes de aire caliente de la Amazonia, que rotan sobre el Brasil en el sentido anti-horario, causan tragedias, afectando a personas e incurriendo en pérdidas económicas considerables. Contribuye aún, la altitud del centro de la ciudad en relación al nivel del mar de 14 m el efecto de las mareas del Océano Atlántico actuando sobre el flujo de las aguas. A todos estos fenómenos climáticos, se asocian también los efectos del calentamiento global. Las lluvias ocurrieron por casi tres meses, en volúmenes no constantes, provocando inundaciones y deslizamientos de cerros, causando una tragedia y pérdidas económicas que superaron millones de dólares. El alto número de afectados desabrigados hizo que órganos públicos reubiquen a las personas. Un problema a los órganos públicos para localizar un área adecuada para crear conjuntos de viviendas. Para eso, el sector de obras del gobierno municipal formó un equipo compuesto por ingenieros, geólogos, meteorólogos y técnicos responsables por el área financiera de la municipalidad.

En la secuencia, se propuso lo siguiente a los estudiantes: *¿cuál es el área ideal para construir viviendas a los afectados desabrigados, libre de inundaciones y deslizamientos, pero con menor costo?* Se les informó a los estudiantes que el problema en la elección del área a ser adquirida se configuraría dentro del ambiente de las decisiones de *múltiple criterio discreto*– esto implica: minimizar el costo de adquisición, maximizar la cuota de alcance de la inundación, minimizar el número de arroyos próximos y minimizar el declive del área.

2. *Comprensión y explicitación*: esta fase, más desafiante, consiste en expresar los datos y proponer algunas hipótesis; plantear los datos de forma que suscite el contenido matemático para resolver la situación-problema. Para eso, se obtuvieron los datos junto al sector de obras del gobierno municipal, una vez que, el equipo ya estaba tratando el asunto, y se les presentó a los estudiantes.

Según datos, hay tres propuestas para la construcción de 620 viviendas. Todas poseen las dimensiones mínimas requeridas para el proyecto. Las áreas posibles propuestas se ubican en regiones alejadas del centro, sin embargo, no totalmente libres de inundaciones, aluvión y deslizamientos. Las características de las áreas en cuestión se encuentran en la Tabla. 1, a seguir, que llevan en consideración los criterios analizados.

Tabla 1. Datos técnicos de cada terreno propuesto

Criterios regiones	Costo (\$)	Inundaciones *(m)	Aluvión** (n.º)	Deslizamiento***
A	2.100.000,00	8,9	3	5°
B	1.900.000,00	14,2	0	8°
C	1.550.000,00	11,7	5	23°

Fuente: Secretaría de Obras PMB

* Cuota libre de inundación

** Número de arroyos, próximos

*** Inclinación máxima del terreno

A continuación, se desarrolló el *contenido matemático* de la disciplina (PO) y se presentaron ejemplos análogos. Por ejemplo, para buscar una respuesta a esta cuestión, se usó el Método de Análisis Jerárquico, propuesto por Saaty (1991). Saaty con su escala fundamental utiliza la matriz de preferencias y la definición de los recíprocos. Establecida la estructura jerárquica, se realiza la comparación a la par de cada alternativa dentro de cada criterio del nivel inmediatamente superior, esto es, para cada criterio, son relacionadas las alternativas debidamente aplicadas en la escala verbal presentada. El juicio verbal del equipo de decisión se transforma en una escala de valores.

La *formulación de la cuestión* permitió diversas discusiones y sugerencias. Se comentaron con los estudiantes, cómo los criterios: costo, riesgos de inundación, aluvión y deslizamiento, no están en una misma escala ni son directamente proporcionales, por tanto, se deben establecer preferencias que dividan el problema en niveles jerárquicos: criterio a criterio, preferencias individuales y colectivas. Se informa a los estudiantes que el uso de esta escala fue aplicado a la definición del área a ser adquirida. No obstante, el uso de este modelo no fue el único método de decisión utilizado en el proceso de compra.

Se establecen las preferencias sobre una escala de 1 hasta 9, que establecen el « límite psicológico », según lo que el ser humano pueda juzgar. Como indica la tabla. 2:

Tabla 2. Escala de preferencias

Valor	Importancia	Descripción
1	Igual importancia	Alternativas contribuyen igualmente para el objetivo
3	Importancia pequeña sobre la otra	Experiencia: el juicio favorece a una alternativa en relación a la otra
5	Importancia grande o esencial	Experiencia: el juicio favorece fuertemente a una alternativa en relación a la otra
7	Importancia muy grande	Una alternativa es fuertemente favorecida en relación a la otra. Puede ser mostrada en la práctica.
9	Importancia absoluta	Evidencia favorecer a una alternativa en relación a la otra, con alto grado de seguridad.
2, 4, 6, 8	Valores intermedios	Usados: cuando se busca una condición de compromiso entre dos definiciones

Fuente: datos del estudio

Al evaluarse las preferencias en cuanto a los costos, se llega a una matriz de preferencia. El costo de cada terreno comparado con el mismo, recibe la preferencia 1, denotando el mismo grado de importancia. De esta preferencia el valor de R\$ 1.550.000,00 del área C es cuatro veces más atrayente a los R\$ 2.100.000,00 del área A y tres veces más importante a los R\$ 1.900.000,00 del área B. Luego, comparando inversamente las preferencias verificamos que el área A es la menos preferida, pues es valorizada en un tercio ($1/3$) en relación al área B y un cuarto ($1/4$) en referencia al terreno C. Por último, el área C fue evaluada como siendo dos veces preferible al área B, luego el terreno es valorizado preferencialmente en un medio ($1/2$) en relación a C. Las demás matrices de preferencia quedaron así evaluadas:

Tabla 3. Matrices de preferencia en cuanto a las inundaciones, aluviones y deslices

Inundación	A	B	C	Aluvión	A	B	C	Deslizamiento	A	B	C
A	1	1/4	1/6	A	1	1/3	4	A	1	2	8
B	4	1	1/3	B	3	1	1/7	B	1/2	1	6
C	6	3	1	C	1/4	7	1	C	1/8	1/6	1

Fuente: datos del estudio

Tomando la matriz de preferencias de las áreas en relación a los deslizamientos, se verifica cuál fue el terreno mejor evaluado. Pero ¿cuánto en relación a los demás?

En esta fase, los contenidos programáticos fueron enseñados como ejemplos análogos presentados. Eso quiere decir que en el proceso de la modelación hay un ir y venir al modelo-guía, así como el reconocimiento de la teoría matemática implicada, que es preciso que el estudiante la conozca, y que hace parte del programa de la disciplina. Corresponde al profesor saber en qué momento avanza con el modelo-guía y cuándo precisa definir contenidos, ilustrar con ejemplos análogos y verificar el aprendizaje.

3. *Significación e expresión:* en esta fase, con el modelo formulado y los contenidos programáticos presentados, se pasó a resolver la situación-problema en términos del modelo y solicitar a los estudiantes a evaluar el resultado, cuan válido es el modelo. Utilizándose de los datos disponibles, se pasó a efectuar consideraciones.

Es preciso establecer una nueva escala que confirme no sólo la posición, sino también, que evalúe la posición de cada área dentro de cada criterio. Para eso, se suman los valores de cada columna y se divide cada una de las celdas por la suma obtenida en la columna. El área 'A' posee las mejores valoraciones. La media aritmética de los valores de cada línea^o establece el ranking en cuanto al criterio evaluado (cf. tabla. 4).

Tabla 4. Normalización y ranking del criterio área

Deslizamiento	A	B	C	Mean
A	8/13	12/19	8/15	0,593
B	4/13	6/19	6/15	0,341
C	1/13	1/19	1/15	0,066
Soma	1	1	1	1

Fuente: datos de la investigación

En los requisitos de costo e inundaciones el terreno 'A' obtuvo la primera posición. En el requisito aluvión el área 'B' y en el deslizamiento el mejor fue el terreno 'A'. Utilizando datos técnicos financieros en cuanto al valor del terreno, al impacto y la frecuencia que cada catástrofe tiene en la sociedad, se encuentra otra matriz de preferencias. El costo del terreno ocupa el top del ranking con 0,398 puntos, la inundación con 0,085 puntos, el Aluvión con 0,218 puntos y el deslizamiento con 0,299 puntos. Multiplicándose la matriz de ranking de los terrenos por criterio, por la matriz de ranking de los criterios, es posible elaborar el ranking final como auxilio al juzgamiento de compra del terreno para la construcción de las viviendas a los desabrigados de esta catástrofe.

En el *análisis de la validez del modelo* los estudiantes discutieron los resultados y la validación del modelo elaborado. Así, verificaron que el área 'B' quedaría en la primera posición, seguido por el área 'C'. Lamentaron, al saber que la decisión del equipo del sector de obras de la ciudad optó por el terreno de menor valor, dándole poca atención al criterio « inundación ». Lo que quiere decir, que la toma de decisiones depende de las personas envueltas, de los intereses, de las posibilidades, de los valores financieros envueltos, etc. Vale destacar que durante todo el proceso los estudiantes participaron activamente.

Aunque no siendo un problema de la Ingeniería Industrial, esta tragedia afectó parte de esos estudiantes, directa o indirectamente. Directa, a aquellos que tuvieron algún daño en su patrimonio físico, indirectamente por los problemas acarreados por las industrias y al comercio de la región. Sectores en que algunos de ellos actuaban profesionalmente.

Paralelamente al período de enseñanza del contenido programático por medio de este modelo-guía, los estudiantes reunidos en grupos (tres estudiantes en cada grupo) eligieron un tema para hacer un trabajo de modelaje. Los trabajos realizados por ellos no atendieron a las expectativas del profesor. Y, al cuestionar a los estudiantes sobre este bajo desempeño apuntaron dos 'fuertes' razones: (1) paralelamente, tenían que atender las demás asignaturas que estaban cursando en el semestre y, por consecuencia, (2) el tiempo era insuficiente para cumplir con las asignaturas y hacer levantamiento de datos una vez que la mayoría actúa profesionalmente.

Así que se concluyó el semestre, les fue solicitado a los estudiantes de ese curso su opinión sobre el método utilizado en esta asignatura: sobre el aprendizaje, la enseñanza y la investigación que tuvieron que hacer. Todos dijeron que les gustó, aprendieron mucho y que todos los profesores deberían hacer algo similar, sin embargo, no ocurre. Opiniones similares obtuve desde que pasé a utilizar el modelaje en la educación. Según Dewey (1978) los intereses son variados, « cada impulso que genere un propósito con fuerza suficiente para mover una persona a luchar por la su realización, se torna un interés» (p. 110).

El interés marca una identificación, expresa una actitud de quien toma parte en alguna especie de actividad. Y concordando con Dewey, el interés es algo intrínseco en el estudiante, emerge hacia una dirección, movido por pasión o deseo. Pero el interés, por sí solo, no impulsa la búsqueda del conocimiento. La necesidad se torna como el 'director' de ese proceso. Y, con este grupo de estudiantes, la necesidad de cumplir las 'n' responsabilidades del Curso aliado a la actividad profesional en que muchos de ellos se encontraban, dificulta que se avance en el propósito educacional.

La necesidad depende de la acción o de la experiencia que es producida por el lado exterior, en una especie de reflejo. De manera general, depende de los objetivos, de los intereses y de las experiencias de cada persona. En la interacción de cada persona con el medio en que está inmerso se desencadenan necesidades que la impulsan a actuar en el sentido de suplirlas o llegar a un equilibrio; de esta acción transcurre el aprendizaje y, por ende, ayuda en su formación.

La vida personal, en particular en esta era virtual, se desarrolla en diferentes frentes, en ocupaciones de intereses y necesidades múltiples. Casi todos los estudiantes participantes de esta asignatura estaban actuando profesionalmente, en dos períodos del día y, a pesar del interés, la parte de ellos que requería la realización de una investigación fuera de los límites del horario de la asignatura, produjo la necesidad de revisar las otras ocupaciones en que estaban envueltos, es decir, fueron invitados a hacer una especie de reflexión. Esta reflexión fue determinante para que la mayoría no cumpliera con plena satisfacción, el modelaje sobre el tema elegido.

4. Consideraciones finales

Esta investigación, de la que presento una síntesis, hace parte de las actividades pedagógicas que adopté hace tres décadas, en cualquier asignatura como profesora o indirectamente, por medio de otro profesor adepto a la propuesta que defendiendo. En esta y en las tantas otras asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral, Investigación Operacional, entre otras, que estuve como profesora/orientadora, como dice Morrison (1991), los estudiantes vivencian los elementos fundamentales de una educación científica: hechos, abstracciones y la comparación de hecho con abstracciones. Ellos entienden cuando los hechos son reducidos a abstracciones, las abstracciones manipuladas para hacer pronósticos, y los pronósticos comparados con los hechos. Sin embargo, este tipo de acción pedagógica aislada, que igual a las expectativas del grupo de estudiantes, no es suficiente para romper con la formación fragmentada que vienen teniendo desde los primeros años de escolaridad y, por lo tanto, no provoca alteración ni transformación en el proceso de formación de esos profesionales.

Al hacer uso del modelaje como método de enseñanza, busco concebir la Matemática y otros tópicos de la ciencia que propicien en el estudiante la posibilidad de enterarse con las cuestiones que va a lidiar futuramente y especialmente, promover una aproximación entre las diversas asignaturas del Curso. Aunque no se subestime la importancia del modelaje en la educación – modelación, algunos aspectos deben ser verificados para no enfatizarlos demasiado, olvidándose de las limitaciones que la estructura educacional produce tanto para el profesor como para los estudiantes.

Por ejemplo, el número de asignaturas por semestre, aliado a la no-continuidad de algunos estudiantes en el mismo curso y de diferentes profesores (de la misma área), dificulta realizar un trabajo de investigación, conjuntamente, a largo plazo; ausencia de interacción entre los profesores de las asignaturas básicas (Álgebra/ Matemática, Física, Química) y los de las demás asignaturas del Curso, impiden al profesor que conozca las necesidades específicas de cada área, lo que contribuye en la repetición de tópicos y el abandono de algunos esenciales.

Las ideas acumuladas en esta investigación me permiten mejorar la comprensión de cada variable analizada, alimentando los resultados de nuestras experiencias que permitirán crear nuevos sentidos y, más aún, otro punto de referencia para que se realice un nuevo recorrido. En la dificultad momentánea de transformar la estructura educacional vigente, la propuesta es invitar a profesores a continuar la búsqueda por nuevos caminos, procesos y métodos necesarios

para adquirir conocimientos necesarios al mantenimiento de la vida y más, provocar el interés y la necesidad de profesores y estudiantes para esta causa. Parafraseando a Levy (1995), esta propuesta convoca un nuevo entendimiento de lo que se hace y de lo que se conoce que «incluye y amplía el 'conócete a ti mismo' para un aprender a conocerse para pensar juntos».

5. Referencias

- [1] BIEMBENGUT, M. S. *Modelação Matemática como Método de Ensino Aprendizagem de Matemática em Cursos de 1º e 2º Graus*. Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro (RS), 1990
- [2] _____, *Qualidade no Ensino de Matemática da Engenharia*. Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis (SC), 1997.
- [3] _____, Modelling in Engineering: Advantages and Difficulties. In: C. HAINES, et al (eds) *Mathematical Modelling ICTMA 12: Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood Publishing, p. 415-423, 2007.
- [4] _____, *Modelagem no Ensino Fundamental*. Edifurb: Blumenau, 2014.
- [5] DAMLAMIAN, A. e STRÄBER, R. Discussion Document. *ICMI Study 20: educational interfaces between mathematics and industry*. ZDM Mathematics Education. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag GmbH, 2009.
- [6] HEILIO, M. Mathematics for Society, Industry and Innovation. *Journal of Mathematical Modelling and Application*. 1 (1) 77-88, 2009. Blumenau. <http://www.furb.br/modelling> .
- [7] MORRISON, F. *The art of Modeling Dynamic Systems: forecasting for chaos, randomness, and determinism*. New York: Dover, 1991.
- [8] SAATY, T. *Método da análise hierárquica*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1991.